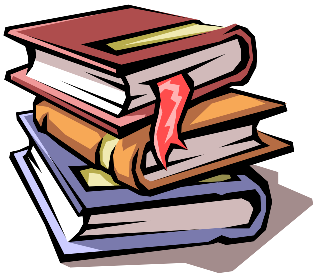
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CÁC BÀI TOÁN THEO CHỦ ĐỀ VÀO 10 CHUYÊN TOÁN 2020-2021

Tài liệu sưu tầm, ngày 31 tháng 3 năm 2021

CÁC BÀI TOÁN THEO CHỦ ĐỀ TRONG ĐỀ LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2020

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán THCS, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em các bài toán theo chủ đề trong đề lớp 10 chuyên năm 2020. Chúng tôi đã kham khảo qua đề thi để làm chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới thường được ra trong các kì thi lớp 10 gần đây. Chuyên đề gồm 9 chủ đề:

- *Rút gọn biểu thức chứa căn và tài toán liên quan*
- *Chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị*
- *Phương trình*
- *Hệ Phương trình*
- *Hàm số*
- *Các bài toán lập phương trình, hệ phương trình, toán thực tế*
- *Chứng minh đẳng thức và tính giá trị biểu thức*
- *Các bài toán số học*
- *Các bài toán tổ hợp và logic*
- *Các bài toán hình học*

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng chuyên đề các bài toán phân theo chủ đề này có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

Mục Lục

Chuyên đề 1
Căn bậc hai và bài toán liên quan

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{3x+5\sqrt{x-1}-14}{x-3+\sqrt{x-1}}-\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-1}-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2}$ với $x\ge 1, x\ne 2$

a) Rút gọn A .

b) Tìm tất cả các giá trị x để A nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn A .

$$A=\frac{3x+5\sqrt{x-1}-14}{x-3+\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-1}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2}$$

$$=\frac{3x+5\sqrt{x-1}-14}{x-3+\sqrt{x-1}}-\frac{x-1-4+(\sqrt{x-1}-1)\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$=\frac{3x+5\sqrt{x-1}-14}{x-3+\sqrt{x-1}}-\frac{x-5+x-1-\sqrt{x-1}}{x-1+\sqrt{x-1}-2}$$

$$=\frac{3x+5\sqrt{x-1}-14+\sqrt{x-1}+6-2x}{x-3+\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{x-8+6\sqrt{x-1}}{x-3+\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x-1)^2}+6\sqrt{x-1}-7}{\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x-1}-2}$$

$$=\frac{\sqrt{(x-1)^2}+7\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-7}{\sqrt{(x-1)^2}+2\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-2}$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+7)-(\sqrt{x-1}+7)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+2)-(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x-1}+7)(\sqrt{x-1}-1)}{(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x-1}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}+7}{\sqrt{x-1}+2}$$

$$=1+\frac{5}{\sqrt{x-1}+2}$$

b) Có $A=1+\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}$

A nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi: $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}\in Z$

Có $0<\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}\le\dfrac{5}{2}$ nên $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}=1$ hoặc $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}=2$

+)Nếu: $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+2=5$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=3$

$\Leftrightarrow x=10$ (thỏa mãn điều kiện)

+Nếu: $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}=2\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+2=\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$(thỏa mãn điều kiện)

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\dfrac{16}{x^2}-\dfrac{8}{x}+1}}$. Với giá trị nào của x thì biểu thức A xác định. Rút gọn A.

Lời giải

Rút gọn biểu thức A .

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\dfrac{16}{x^2}-\dfrac{8}{x}+1}}$ Điều kiện xác định: $x>4$.

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{4}{x}-1\right)^2}}=\frac{\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|}{\left|\dfrac{4}{x}-1\right|}$$

Xét: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-4}-2\ge0\Leftrightarrow x\ge8\Rightarrow\left|\sqrt{x-4}-2\right|=\sqrt{x-4}-2\\ \sqrt{x-4}-2<0\Leftrightarrow x<8\Rightarrow\left|\sqrt{x-4}-2\right|=2-\sqrt{x-4}\end{array}\right.$

+) Với $4<x<8\ \Rightarrow A=\dfrac{4x}{x-4}$.

+) Với $x\ge8\Rightarrow A=\dfrac{2x.\sqrt{x-4}}{x-4}$.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Cà Mau năm 2020-2021)*

a) Tính giá trị biểu thức: $A=\left(5-\sqrt{11}\right)\left(5+\sqrt{11}\right)-\left(3-\sqrt{5}\right)^2$

b) Rút gọn biểu thức: $B=\dfrac{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}\left(x>0;y>0\right)$

Lời giải

a) Tính giá trị biểu thức:

$A=\left(5-\sqrt{11}\right)\left(5+\sqrt{11}\right)-\left(3-\sqrt{5}\right)^2$

$A=25-11-\left(9-6\sqrt{5}+5\right)$

$A=14-14+6\sqrt{5}$

$A=6\sqrt{5}$

b) Rút gọn biểu thức:

$$B=\frac{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}$$

$$B=\frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}$$

$B=x-y$

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Nông chuyên toán năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $P=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P với $x=4+2\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P.

ĐKXĐ: $x>0$ và $x\neq 1$

$$P=\frac{x}{\sqrt{x}-1}-\frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)}=\sqrt{x}-1$$

b) Tính giá trị của biểu thức P với $x=4+2\sqrt{3}$.

Thay $x=4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$ vào biểu thức $P=\sqrt{x}-1$, ta có:

$P=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-1=\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}$

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 2 năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{x^3-4x-80}{x^2-16}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa và rút gọn A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

c) Tìm x để biểu thức $(A-x)$ có giá trị là số nguyên tố.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\ge 0$; $x\ne 4$.

Ta có $A=\dfrac{x^3-4x-80}{x^2-16}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{x^3-4x-80}{x^2-16}+\dfrac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\dfrac{x^3-4x-80}{(x-4)(x+4)}+\dfrac{4}{x-4}=\dfrac{x^3-4x-80+4x+16}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{x^3-64}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)}{(x-4)(x+4)}$

Vậy $A=\dfrac{x^2+4x+16}{x+4}$.

b) Do $x\ge 0$ nên $A=\dfrac{x^2+4x+16}{x+4}=\dfrac{x^2}{x+4}+4\ge 4$.

Mặt khác $A=4$ khi $x=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4, khi $x=0$.

c) Ta có $A-x=\dfrac{16}{x+4}$. Vì $x\ge 0$ nên $0<\dfrac{16}{x+4}\le 4$.

Do đó , để biểu thức $(A-x)$ có giá trị là số nguyên tố thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{16}{x+4}=2\\ \dfrac{16}{x+4}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\ (l)\\ x=\dfrac{4}{3}\ (tm)\end{array}\right.$.

Vậy $x=\dfrac{4}{3}$.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}\left(x\ge 0, x\ne 1\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Hãy so sánh giá trị của biểu thức A với $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A.

$A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}\left(x\ge 0, x\ne 1\right)$

$=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x-4+x-1+3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{2x-5+3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$$

b) Hãy so sánh giá trị của biểu thức A với $\frac{5}{2}$.

Xét $A-\frac{5}{2}=\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}-\frac{5}{2}=\frac{4\sqrt{x}+10-5\sqrt{x}-10}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}$

Vì $x\ge 0$ nên $\sqrt{x}\ge 0$; $\sqrt{x}+2\ge 2$ với mọi $x\ge 0, x\ne 1$

Suy ra : $\begin{cases}-\sqrt{x}\le 0\\ 2\left(\sqrt{x}+2\right)\ge 4\end{cases}$ hay $\frac{-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}\le 0$ với mọi $x\ge 0, x\ne 1$

Do đó : $A-\frac{5}{2}\le 0$ với mọi $x\ge 0, x\ne 1$

Hay : $A\le \frac{5}{2}$.

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Hùng Vương – Phú Thọ năm 2020-2021)*

Cho $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ .Tính giá trị biểu thức $P=\left(2x^3-6x+2008\right)^{2021}$.

Lời giải

Cho $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(2x^3-6x+2008\right)^{2021}$

Từ $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\Leftrightarrow x^3=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}+3-2\sqrt{2}+3x$

$\Leftrightarrow x^3-3x=6\Leftrightarrow x^3-3x-6=0$.

Ta có: $2x^3-6x+2008=2\left(x^3-3x-6\right)+2020=2020$

Vậy $P=2020^{2021}$.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Nam năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $A=\frac{2}{1+\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}+\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{18}{x-9}$ với $x\ge 0; x\ne 9$.

Rút gọn biểu thức A.

Lời giải

$$A=\frac{2}{1+\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}+\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{18}{x-9} \text{ với } x\ge 0; x\ne 9$$

$$A=\frac{2}{1+\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{18}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$A=\frac{2}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{18}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$A=\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{18}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$A=\frac{2\sqrt{x}-6+x+3\sqrt{x}-18}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$A=\frac{x+5\sqrt{x}-24}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+8\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}.$$

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2020-2021)*

Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x}:\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$ với $x=4+2\sqrt{3}$.

Lời giải

Với $0<x\ne 1$

Ta có: $A=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x}:\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$=\frac{1}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Với $x=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{3}+1$

Suy ra $A=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $A=\left(1-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}+1}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $a=2021-2\sqrt{2020}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức *A*.

ĐKXĐ: $a\ge 0; a\ne 1$

$$A=\left(\frac{a+1-2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)$$

$$A=\sqrt{a}+1$$

b) Tính giá trị của A khi $a=2021-2\sqrt{2020}$

Khi đó $a=2021-2\sqrt{2020}=\left(\sqrt{2020}-1\right)^2$

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{2020}-1\right)^2}+1=\sqrt{2020}-1+1=\sqrt{2020}$$

Vậy khi $a=2021-2\sqrt{2020}$ thì $A=\sqrt{2020}$

Câu 11. *(Trường chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương không chuyên năm 2020-2021)*

Tính giá trị của biểu thức:

$$B=(10x^2-30x+11)^2+\frac{(2x^2-6x+3)^{10}}{x^5-3x^4+x^3-1} \text{ khi } x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Lời giải

Ta có $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow (2x-3)^2=5\Leftrightarrow 4x^2-12x+4=0\Leftrightarrow x^2-3x+1=0$

Ta có $10x^2-30x+11=10(x^2-3x+1)+1=10.0+1=1$

$2x^2-6x+3=2x^2-6x+2+1=2(x^2-3x+1)+1=2.0+1=1$

$x^5-3x^4+x^3-1=x^3(x^2-3x+1)-1=0-1=-1$

Vậy $B=0$.

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi năm 2020-2021)*

Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$, với $a>0, a\ne 1$.

Lời giải

Ta có: $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$

$$=\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)\left[\frac{\left(a-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)-\left(a+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{a-1}\right]$$

$$= \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{a\sqrt{a} - 2a + \sqrt{a} - a\sqrt{a} - 2a - \sqrt{a}}{a-1}$$

$$= \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{-4a}{a-1} = \frac{-4a}{2\sqrt{a}} = -2\sqrt{a}$$

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $A = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{1}{x+\sqrt{x}}$.

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.
2. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa $2A - x = 3$.

Lời giải

Cho biểu thức $A = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{1}{x+\sqrt{x}}$.

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

Điều kiện: $0 < x \neq 1$

$$A = \left[\frac{3\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]\left(x+\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{\left(3\sqrt{x}-1\right) - \left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}.\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

2. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa $2A - x = 3$.

$2A - x = 3 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} - x = 3$

$\left(\sqrt{x}-3\right)\left(1-\sqrt{x}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 1\ (l) \end{array}\right.$$

Vậy $x = 9$ là giá trị cần tìm.

Câu 14. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Rút gọn biểu thức $A = \left(1 - \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\left(1 - \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

Lời giải

Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2020-2021)*

Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x-4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+3}$ với $0\le x\ne 4$.

Lời giải

$$P=\frac{x-4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+3}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}+\frac{x+\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+4}=\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}+4}=1$$

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Yên Bái năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right):\left(\dfrac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$, với $a>0,a\ne 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm tất cả các giá trị của a để $P>2$.

Lời giải

1. Với $a>0,a\ne 1$ ta có

$$P=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}\left(a-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right):\left(\frac{a\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}+1}\right)$$

$$=\frac{a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1+4\text{a}\sqrt{a}-4\sqrt{a}}{a-1}:a\sqrt{a}$$

$$=\frac{4\text{a}\sqrt{a}}{a-1}:a\sqrt{a}$$

$=\dfrac{4}{a-1}$. Vậy $P=\dfrac{4}{a-1}$

2. Tìm tất cả các giá trị của a để $P>2$.

$$P>2\Leftrightarrow\frac{4}{a-1}>2\Leftrightarrow\frac{2}{a-1}-1>0\Leftrightarrow\frac{3-a}{a-1}>0\Leftrightarrow 1<a<3$$

Vậy $1<a<3$ thì $P>2$.

Câu 17. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x>0;x\ne 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm x để $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1$.

Lời giải

1. **1.(1,0 điểm)** Rút gọn biểu thức P

$$P=\left[\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right]:\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

2. **2.(1,0 điểm)** Tìm x để $\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1$

$$\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{16\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-1-8\sqrt{x}-8}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}\ge 0$$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{x}-x-9\ge 0$ (vì $8\left(\sqrt{x}+1\right)>0$ với mọi $x>0;\ x\ne 1$)

$$\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)^2\le 0\Leftrightarrow\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow x=9$$

Vậy x = 9 thỏa mãn điều kiện.

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình 2020-2021)*

1) Rút gọn biểu thức:

a) $A=\frac{a-9}{\sqrt{a}-3}$ b) $B=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1-\sqrt{2}}-\frac{2+\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}}$

Lời giải

$ĐKXĐ: a\ge 0; a\ne 9$

$$A=\frac{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)}{\sqrt{a}-3}=\sqrt{a}+3$$

$$B=\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}-\frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-2$$

Câu 19. *(Trường chuyên tỉnh Điện Biên Vòng 2 năm 2020-2021)*

Cho biểu thức: $P=\frac{a^2-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}-\frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\frac{2(a-1)}{\sqrt{a}-1}$ (với $a>0, a\ne 1$).

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

a) Rút gọn P.

Với $a>0, a\neq 1 \Rightarrow P=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}^3-1)}{a+\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}(2\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}}+\dfrac{2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1}$

$$P=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{a+\sqrt{a}+1}-(2\sqrt{a}+1)+2(\sqrt{a}+1)=a-\sqrt{a}+1$$

b) Tính giá trị nhỏ nhất của P.

$$P=a-\sqrt{a}+1=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4} \text{ (Với } \forall a>0, a\neq 1)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{3}{4}$ khi $a=\dfrac{1}{4}$.

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long chuyên toán năm 2020-2021)*

a) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\dfrac{3}{x^3-\sqrt{27}}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x}+1\right)$. Tìm điều kiện xác định của A và tính giá trị của A khi $x=\sqrt{3}+2020$.

b) Tính giá trị của biểu thức $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\neq 0$; $x\neq\sqrt{3}$.

$$A=\left(\frac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\frac{3}{(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)}\right)\left(\frac{x^2+x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}x}\right)$$

$$=\left(\frac{(x-\sqrt{3})\sqrt{3}+3}{(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)}\right)\left(\frac{x^2+x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}x}\right)=\frac{1}{x-\sqrt{3}}$$

Thay $x=\sqrt{3}+2020$ vào A ta được $A=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2020-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2020}$.

b) $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=1.$

Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{a+1+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$, với $a\geq 0, a\neq 1$.

Lời giải

Ta có $A=\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}+1}$

$=\sqrt{a}+1+\sqrt{a}+1=2\left(1+\sqrt{a}\right).$

Câu 22. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$.

Rút gọn P. Tìm tất cả các giá trị của x để $P\le -\dfrac{1}{7}$.

Lời giải

$$P=\left(\frac{2\sqrt{x}}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}\right)\qquad \text{ĐK: } x\ge 0, x\ne 1$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\cdot\frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow P=\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$P\le -\frac{1}{7}\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\le -\frac{1}{7}\Leftrightarrow 7-7\sqrt{x}\le -x-\sqrt{x}-1\ \left(do\ x+\sqrt{x}+1>0\ \forall x\ge 0\right)$$

$$\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+8\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-4\right)\le 0\Leftrightarrow 2\le \sqrt{x}\le 4\Leftrightarrow 4\le x\le 16.$$

Câu 23. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để P là số nguyên.

Lời giải

a) Ta có:

$$P=\frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P=\frac{x\sqrt{x}+8\sqrt{x}-3x-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P=\frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P=\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có $P>0, P\in\mathbb{N}$ và $\left(\sqrt{x}-\dfrac{P}{2}\right)^2=\dfrac{P^2+4P-32}{4}$.

Suy ra $\left(\sqrt{x}-\dfrac{P}{2}\right)^2=\dfrac{\left(P-4\right)\left(P+8\right)}{4}$

Suy ra $P \geq 4, P \in \mathbb{N}$ và $\left|\sqrt{x}-\frac{P}{2}\right|=\frac{\sqrt{(P-4)(P+8)}}{2}$.

$8 \geq P \geq 4, P \in \mathbb{N}$

$x=\left(\frac{P-\sqrt{(P-4)(P+8)}}{2}\right)^2 ; x=\left(\frac{P+\sqrt{(P-4)(P+8)}}{2}\right)^2$

$P>8, P \in \mathbb{N}$

$x=\left(\frac{P+\sqrt{(P-4)(P+8)}}{2}\right)^2$

Câu 24. *(Trường chuyên Quảng Bình năm 2020-2021)*

Cho biểu thức: $P=\frac{2x}{x-9}+\frac{3}{\sqrt{x}-3}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}$ (với $x \geq 0, x \neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức *P*.

b) Tìm các giá trị của *x* để $P=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $P=\frac{2x}{x-9}+\frac{3}{\sqrt{x}-3}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}$

$$=\frac{2x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}+\frac{3(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}+\frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{2x+3\sqrt{x}+9+3\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{2x+6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

Với $x \geq 0, x \neq 9$ thì: $P=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}=-\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}=-\sqrt{x}+3$.

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=\frac{9}{25}$ (thỏa mãn)

Vậy $x=\frac{9}{25}$ thì $P=-\frac{1}{2}$

Câu 25. *(Trường chuyên toán Quảng Bình năm 2020-2021)*

Cho biểu thức: $P=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}-2}\right):\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}-2}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh $P\le\frac{1}{7}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ : $x\ge 0,\ x\ne 4$.

$$P=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(x-\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{x-\sqrt{x}+2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{x-4-x+\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{x+\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2}.$$

b) Với $x\ge 0,\ x\ne 4\quad(*)$

Ta có $P\le\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2}\le\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{1}{7}-\frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\frac{x+\sqrt{x}+2-7\sqrt{x}+7}{7\left(x+\sqrt{x}+2\right)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{x-6\sqrt{x}+9}{x+\sqrt{x}+2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)^2}{x+\sqrt{x}+2}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện $(*)$

Dấu bằng xảy ra khi $x=9$.

Vậy $P \le \frac{1}{7}$ với mọi $x \ge 0,\ x \ne 4 \quad (*)$

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2020-2021)*

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right).\left(3\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x \ge 0,\ x \ne 1,\ x \ne 4,\ x \ne 9$.

a. Rút gọn *A*.

b. Tìm *x* để $A < 2$.

Lời giải

a) $A = \frac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)-(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}.\frac{3x-4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}$

$= \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}.\frac{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-1} = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

b. $A < 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} < 0$

Vì $\sqrt{x}+4 > 0$ với mọi *x* nên $\sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 1$

KL: $0 \le x < 1$.

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức

$$A = \sqrt{2-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1+4\sqrt{7-4\sqrt{3}}}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{2-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1+4\sqrt{7-4\sqrt{3}}} \\
&= \sqrt{2-2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} + \sqrt{-1+4\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}} \\
&= \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{3}-1+2-\sqrt{3} = 1
\end{aligned}$$

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2020-2021)*

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{2019}{1-\sqrt{2020}} + \frac{2021+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}} - \frac{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{2020}}+\frac{1}{2020}}}{1+\sqrt{2020}}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \frac{2019}{1-\sqrt{2020}} + \frac{2021+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}} - \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2020}}\right)^2}}{1+\sqrt{2020}}.$$

$$= \frac{2019}{1-\sqrt{2020}} + \frac{2021+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}} - \frac{1}{\sqrt{2020}}$$

$$= \frac{2019}{1-\sqrt{2020}} + \frac{2020+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}}$$

$$= \frac{2019}{1-\sqrt{2020}} + \sqrt{2020} + 1$$

$$= 0$$

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Hậu Giang năm 2020-2021)*

Tính giá trị đúng của biểu thức $A = \sqrt{43-30\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{43-30\sqrt{2}} = \sqrt{\left(5-3\sqrt{2}\right)^2} = 5-3\sqrt{2}$.

$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = 2-\sqrt{2}$.

Từ đó, ta có $A = 7-4\sqrt{2}$.

Chuyên đề 2

Bất đẳng thức và tìm Cực trị

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2020-2021)*

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{3}$$

Lời giải

Chứng minh với ba số dương x, y, z ta có $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Chứng minh được bất đẳng thức $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}+\frac{z^2}{p}\ge\frac{(x+y+z)^2}{m+n+p}$ $\forall m,n,p>0$ (2). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$.

Đặt $P=\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức (1), ta có

$$\left[(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)\right].\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2a^2+bc}\right)\ge 9$$

$$\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}=\frac{9a^2}{(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)}\le a^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{2a^2+bc}\right)$$

Chứng minh tương tự, ta được

$$\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}\le b^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{2b^2+ac}\right)$$

$$\frac{9b^2}{5c^2+(a+b)^2}\le c^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{2c^2+ab}\right)$$

Khi đó, ta có

$$\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le 1+\left(\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)$$

Suy ra $9P\le 4-\left(\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\right)$

Ta có: $\dfrac{bc}{2a^2+bc}+\dfrac{ca}{2b^2+ca}+\dfrac{ab}{2c^2+ab}=\dfrac{b^2c^2}{2a^2bc+b^2c^2}+\dfrac{c^2a^2}{2ab^2c+c^2a^2}+\dfrac{a^2b^2}{2abc^2+a^2b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức (2), ta được $\dfrac{bc}{2a^2+bc}+\dfrac{ca}{2b^2+ca}+\dfrac{ab}{2c^2+ab}\ge\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2}=1$

Vậy $9P\le 3\Rightarrow P\le\dfrac{1}{3}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số dương thảo mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=(1+2a)(1+2bc)$.

Lời giải

Ta có: $A=(1+2a)(1+2bc)\le(1+2a)\left(1+b^2+c^2\right)=(1+2a)\left(2-a^2\right)$.

Mà $(1+2a)\left(2-a^2\right)=\dfrac{1}{2}(2+4a)\left(6-3a^2\right)\le\dfrac{1}{24}.\left(2+4a+6-3a^2\right)^2=\dfrac{1}{6}.\left(8+4a-3a^2\right)^2$.

Đánh giá: $0<8+4a-3a^2=8+\dfrac{4}{3}-3\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2\le\dfrac{28}{3}$.

$\Rightarrow A\le\dfrac{1}{24}.\left(\dfrac{28}{3}\right)^2=\dfrac{98}{27}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng $\dfrac{98}{27}$. Dấu "= " xảy ra khi và chỉ khi

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bình Dương năm 2020-2021)*

Với các số thực x,y thay đổi thỏa mãn $1\le x\le y\le 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\left(x^2+y^2\right)+4(x-y-xy)+7$.

Lời giải

Ta có

$P=2\left(x^2+y^2\right)+4(x-y-xy)+7=2\left(x^2+y^2+2x-2y-2xy\right)+7$

$=2\left(x^2+y^2+1+2x-2y-2xy\right)+5=2(x-y+1)^2+5\ge 5,\forall x,y$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+1=0\\1\le x\le y\le 5\end{cases}$. Ví dụ $x=3,y=4$.

Vậy $P_{\min}=5\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+1=0\\1\le x\le y\le 5\end{cases}$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Nông chuyên toán năm 2020-2021)*

Cho hai số dương x,y thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{xy}$.

Lời giải

Ta có, với $a,b>0$: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow(a+b)^2\ge 4ab$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

$$A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{1}{2xy}.$$

Mà $4xy\le(x+y)^2\Rightarrow\frac{1}{2xy}\ge\frac{2}{(x+y)^2}$.

$$\Rightarrow A\ge\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{2}{(x+y)^2}=\frac{6}{(x+y)^2}=6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x=y\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 6 đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 2 năm 2020-2021)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{25}{4+x}-\frac{1}{x-2}$ với $-4<x<2$.

Lời giải

Ta có: $P=\frac{25}{4+x}-\frac{1}{x-2}$ với $-4<x<2$

$$=\frac{25}{x+4}+\frac{1}{2-x}$$

$$=\frac{1}{6}.\frac{25(x+4+2-x)}{x+4}+\frac{1}{6}.\frac{2-x+x+4}{2-x}$$

$$=\frac{1}{6}.\left[26+25.\frac{2-x}{x+4}+\frac{x+4}{x-2}\right]$$

$$\Rightarrow 6P=26+\frac{25(2-x)}{4+x}+\frac{(4+x)}{2-x}$$

$$6P-26=\frac{25(2-x)}{4+x}+\frac{(4+x)}{2-x}\ge 2\sqrt{25}=10\Rightarrow P\ge 6$$

$$\Rightarrow P_{\min}=6\Leftrightarrow\frac{25(2-x)}{4+x}=\frac{(4+x)}{2-x}>0\Leftrightarrow x=1$$

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2020-2021)*

Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2z^2+y^2z^2+1\le 3z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{8}{(y+3)^2}+\frac{4z^2}{(1+2z)^2}$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh: $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\geq\frac{8}{(A+B)^2}$, $A,B\in\mathbb{R};A,B>0$

$$\Leftrightarrow\frac{A^2+B^2}{A^2B^2}\geq\frac{8}{(A+B)^2}\Leftrightarrow\left(A^2+B^2\right)(A+B)^2\geq 8A^2B^2$$ (luôn đúng)

Từ giả thiết $z>0$, đặt $x=a,y=b,z=\frac{1}{2c}$

Từ $x^2z^2+y^2z^2+1\leq 3z\Rightarrow a^2\cdot\frac{1}{4c^2}+b^2\frac{1}{4c^2}+1\leq 3\cdot\frac{1}{2c}\Rightarrow a^2+b^2\leq 6c-4c^2$

$$a^2+b^2+c^2\leq 6c-3c^2=3\left[1-(c-1)^2\right]\leq 3$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có:

$$(a+b+c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq 9\Rightarrow a+b+c\leq 3\Rightarrow 0<a+b+c+5\leq 8$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(a+b+c+5)^2}\geq\frac{1}{64}$$

Ta có: $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{8}{(y+3)^2}+\frac{4z^2}{(1+2z)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2z}\right)^2}+\frac{8}{(y+3)^2}$

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{8}{(b+3)^2}=\left[\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}\right]+\frac{8}{(b+3)^2}$$

$$\geq\frac{8}{(a+c+2)^2}+\frac{8}{(b+3)^2}=8\left[\frac{1}{(a+c+2)^2}+\frac{1}{(b+3)^2}\right]$$

$$\geq\frac{64}{(a+c+2+b+3)^2}\geq 1$$

Dấu "$=$" xảy ra khi $a=b=c=1$ tức là $\begin{cases}x=y=1\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}$

Vậy $\min P=1$.

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số thực thảo mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{c^2a^2}+\frac{b^2+1}{a^2b^2}+\frac{c^2+1}{b^2c^2}\geq a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\ .$$

Lời giải

Ta có: $abc = 1$ nên $abc \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{bc} \\ b = \dfrac{1}{ac} \\ c = \dfrac{1}{ab} \end{cases}$

$\dfrac{a^2+1}{c^2a^2} + \dfrac{b^2+1}{a^2b^2} + \dfrac{c^2+1}{b^2c^2} \geq a(b+1) + b(c+1) + c(c+1)$

$\Leftrightarrow b^2(a^2+1) + c^2(b^2+1) + a^2(c^2+1) \geq (ab+c) + (bc+a) + (ca+b)$

$\Leftrightarrow (a^2b^2+c^2) + (b^2c^2+a^2) + (c^2a^2+b^2) \geq \left(\dfrac{1}{c}+c\right) + \left(\dfrac{1}{a}+a\right) + \left(\dfrac{1}{b}+b\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{c^2}+c^2\right) + \left(\dfrac{1}{a^2}+a^2\right) + \left(\dfrac{1}{b^2}+b^2\right) \geq \left(\dfrac{1}{c}+c\right) + \left(\dfrac{1}{a}+a\right) + \left(\dfrac{1}{b}+b\right)$

Ta chứng minh $\dfrac{1}{a^2} + a^2 \geq \left(\dfrac{1}{a} + a\right)$

Ta có: $\dfrac{1}{a^2} + a^2 = \left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right)^2 - 2$

Xét hiệu $\dfrac{1}{a^2} + a^2 - \left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right) = \left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right)^2 - \left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right) - 2 = \left[\left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right) - 2\right]\left[\left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right) + 1\right]$

Sử dụng bất đẳng thức Cô – si: $\dfrac{1}{|a|} + |a| \geq 2$

$\Rightarrow \left[\left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right) - 2\right]\left[\left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right) + 1\right] \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2} + a^2 - \left(\dfrac{1}{|a|} + |a|\right) \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2} + a^2 \geq \dfrac{1}{|a|} + |a| \geq \dfrac{1}{a} + a$

Chứng minh tương tự ta được: $\dfrac{1}{b^2} + b^2 \geq \dfrac{1}{b} + b, \dfrac{1}{c^2} + c^2 \geq \dfrac{1}{c} + c$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases}$ mà $abc = 1$ nên ta có các bộ số $(a; b; c)$ có dạng

$(1;1;1); (-1;-1;1); (1;-1;-1); (-1;1;-1)$ thỏa mãn để dấu "=" xảy ra.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d, e ta luôn có

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$

Lời giải

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2 \ge 4a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2-4a(b+c+d+e) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2 \ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi $a=2b=2c=2d=2e$.

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Lạng Sơn năm 2020-2021)*

1) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{36x}+\frac{1}{9y}+\frac{1}{z}$.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)} \ge \frac{3}{4}.$$

Lời giải

1) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$P=\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{3\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right] \ge \left(\sqrt{x}\frac{1}{6\sqrt{x}}+\sqrt{y}\frac{1}{3\sqrt{y}}+\sqrt{z}\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2$$

$$\Rightarrow P \ge \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+1\right)^2=\frac{9}{4}$$

Dấy "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}6x=3y=z\\x+y+z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2x+6x=1\\6x=3y=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{9}\\6x=3y=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{9}\\y=\frac{2}{9}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$

Vậy GTNN của P là $\frac{9}{4}$ tại $x=\frac{1}{9}, y=\frac{2}{9}, z=\frac{2}{3}$

2) Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{a+1}{8}+\frac{b+1}{8} \ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}\cdot\frac{a+1}{8}\cdot\frac{b+1}{8}}=\frac{3}{4}a$$

$$\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{b+1}{8} \ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}\cdot\frac{c+1}{8}\cdot\frac{b+1}{8}}=\frac{3}{4}b$$

$$\frac{c^3}{(a+1)(c+1)}+\frac{a+1}{8}+\frac{c+1}{8} \ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{c^3}{(a+1)(c+1)}\cdot\frac{a+1}{8}\cdot\frac{c+1}{8}}=\frac{3}{4}c$$

Suy ra $\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}+\frac{3}{2} \ge \frac{3}{4}(a+b+c)=\frac{9}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Dấu $"=" \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2020-2021)*

Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3 \leq \frac{1}{8}+a^4+b^4+c^4$$

Lời giải

Xét hiệu $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)=\left(a^3-a^4\right)+\left(b^3-b^4\right)+\left(c^3-c^4\right)$

$=a^3(1-a)+b^3(1-b)+c^3(1-c)=a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)$

$=a^2(ab+ac)+b^2(ab+bc)+c^2(ac+bc)$

Do a,b,c không âm nên ab,ac,bc không âm, suy ra $a^2(ab+ac)+b^2(ab+bc)+c^2(ac+bc)$

$\leq a^2(ab+ac)+a^2bc+b^2(ab+bc)+b^2ac+c^2(ac+bc)+c^2ab$

$=a^2(ab+ac+bc)+b^2(ab+bc+ac)+c^2(ac+bc+ab)=\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+ac+bc)$

$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)(2ab+2ac+2bc)$

$\leq \frac{1}{2}\frac{\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)^2}{4}=\frac{1}{2}\frac{\left[(a+b+c)^2\right]^2}{4}=\frac{1}{8}.$

Hay $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)\leq\frac{1}{8}\Leftrightarrow\left(a^3+b^3+c^3\right)=\frac{1}{8}+a^4+b^4+c^4$ (đpcm).

Câu 11. *(Trường chuyên Nghệ An chuyên năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}},\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}},\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$ ta được :

$$P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}.\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}.\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}}=3\sqrt[6]{\frac{a+b}{c+ab}.\frac{b+c}{a+bc}.\frac{c+a}{b+ca}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương $(c+ab);(a+bc)$ ta được :

$$(c+ab).(a+bc)\leq\frac{(c+ab+a+bc)^2}{4}=\frac{\left[b(a+c)+(a+c)\right]^2}{4}=\frac{(a+c)^2(b+1)^2}{4}\quad(1)$$

Tương tự : $(a+bc).(b+ca)\leq\frac{(a+b)^2(c+1)^2}{4}$ (2)

$$(b+ca).(c+ab)\le\frac{(b+c)^2(a+1)^2}{4}\ (3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra :

$$(b+ca)(a+bc)(c+ab)\le\frac{(a+b)(b+c)(c+a)(a+1)(b+1)(c+1)}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho ba số dương $(a+1);(b+1);(c+1)$ ta được :

$$(a+1)(b+1)(c+1)\le\frac{(a+1+b+1+c+1)^3}{27}=\frac{(a+b+c+3)^3}{27}=\frac{6^3}{27}=8$$

Từ đó suy ra $(b+ca)(a+bc)(c+ab)\le(a+b)(b+c)(c+a)$

Do đó $\frac{a+b}{c+ab}.\frac{b+c}{a+bc}.\frac{c+a}{b+ca}\ge1\Rightarrow\sqrt[6]{\frac{a+b}{c+ab}.\frac{b+c}{a+bc}.\frac{c+a}{b+ca}}\ge1\Rightarrow P\ge3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, đạt được khi $a=b=c=1$.

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ Chuyên Tin năm 2020-2021)*

Cho 3 số thực dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3xyz$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{x}{3y^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{y}{3x^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{z}{3x^2y^2+xyz}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết $xy+yz+zx=3xyz$, ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$.

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$. Ta có $a,b,c>0;a+b+c=3$.

Ta phải chứng minh $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{3a+bc}}\le\frac{3}{2}$

Thật vậy: Thay $a+b+c=3,\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b+c)a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c}$ ta được

$$\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$$

Tương tự $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}\le\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{b+c}\right)$ và $\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}\right)$

Cộng vế với vế và biến đổi $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z=1$.

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Nam năm 2020-2021)*

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=3xy+yz^2+zx^2-x^2y$.

Lời giải

$H=3xy+yz^2+zx^2-x^2y$

$H=(x+y+z)xy+yz^2+zx^2-x^2y$

$H=x^2y+xy^2+xyz+yz^2+zx^2-x^2y$

$H=xy^2+xyz+yz^2+zx^2$

Không mất tính tổng quát giả sử y lớn hơn x và y nhỏ hơn z ,ta có:

$(y-x)(y-z)\le 0$

$\Leftrightarrow x\left(y^2-yz-xy+xz\right)\le 0$

$\Leftrightarrow xy^2-xyz-x^2y+x^2z\le 0$

$\Leftrightarrow xy^2+x^2z\le xyz+x^2y$

$\Leftrightarrow xy^2+x^2z+xyz+yz^2\le xyz+x^2y+xyz+yz^2$

$H\le xyz+x^2y+xyz+yz^2=y(x+z)^2$

$H\le 4.y.\frac{(x+z)}{2}\cdot\frac{(x+z)}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si :

$4.y.\frac{(x+z)}{2}\cdot\frac{(x+z)}{2}\le 4.\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=4$

Suy ra $H\le 4$

$H_{max}=4\Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 14. *(Trường chuyên toán Phú Thọ năm 2020-2021)*

Cho $x,y,z>0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}}\ge 2.$$

Lời giải

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}}\ge 2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}}+\frac{1}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)}+\sqrt{\frac{2\sqrt{z}}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{x}}}\ge 2\quad (*)$$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x}=a\\ \frac{1}{\sqrt{y}}=b\\ \sqrt{z}=c\end{cases}$ với $a,b,c>0$ BĐT (*) trở thành : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\ge 2\quad (**)$

Áp dụng bđt $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\ge\frac{4}{A+B}$, $(A;B>0)$ ta có: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{4}{b+c+c+a}=\frac{4}{2c+a+b}$

$$\Rightarrow\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{4(a+b+c)}{2c+a+b}\quad(1)$$

Lại có : $\sqrt{\frac{2c}{a+b}}=\frac{2c}{\sqrt{2c(a+b)}}\ge\frac{4c}{2c+a+b}\quad(2)$

Từ (1) và (2) ta có : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\ge\frac{4(a+b+c)}{2c+a+b}-2+\frac{4c}{2c+a+b}=4-2=2$

BĐT (**) đúng vậy BĐT cần chứng minh là đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}=z$

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh TP Hồ Chí Minh năm 2020-2021)*

a) Cho 2 số thực a,b. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$.

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b\le3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=b-a+\frac{20}{a}+\frac{7}{b}$.

Lời giải

a) Ta có

$\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{2}\ge\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2+2)}\ge0$ (luôn đúng với mọi a,b là số thực).

b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$Q=b-a+\frac{20}{a}+\frac{7}{b}=-6(a+b)+5a+\frac{20}{a}+7b+\frac{7}{b}\ge-6\cdot3+20+14=16.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 16.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2020-2021)*

Cho ba số dương a,b,c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{2021}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$.

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{b^2+c^2}$, $y=\sqrt{c^2+a^2}$, $z=\sqrt{a^2+b^2}$ với $(x,y,z>0;x+y+z=\sqrt{2021})$;

$$\to a^2=\frac{y^2+z^2-x^2}{2},\ b^2=\frac{x^2+z^2-y^2}{2},\ c^2=\frac{x^2+y^2-z^2}{2}$$

và áp dụng các BĐT:

$$b+c\le\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}=\sqrt{2}x, c+a\le\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}=\sqrt{2}y, a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=\sqrt{2}z$$

suy ra $VT\ge\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\dfrac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$

$$\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}-x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}-y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}-z\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}+2x-3x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}+2y-3y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}+2z-3z\right)\right]$$

$$\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2(y+z)-3x\right)+\left(2(z+x)-3y\right)+\left(2(x+y-3z\right)\right]$$

Suy ra $VT\ge\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2021}{2}}$ (đpcm).

Câu 17. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2020-2021)*

Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 16$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 2\sqrt{\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}.\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{8\dfrac{(a+b+c)^2}{3}}{ab+bc+ca}.\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}=12\sqrt{\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}$$

Ta sẽ chứng minh

$$12\sqrt{\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}\ge 16\Leftrightarrow 9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(ab+bc+ca)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 9\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc\right]\ge 8\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc\right]$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge 6abc$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{c}\right)+\left(\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{c+a}{b}\right)\ge 6\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow\dfrac{(a-b)^2}{ab}+\dfrac{(b-c)^2}{bc}+\dfrac{(c-a)^2}{ca}\ge 0$ (luôn đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước 2020-2021)*

a) Cho a,b là hai số dương. Chứng minh rằng:

i. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ ***ii.*** $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}(a+5b+2)$.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}.$$

Lời giải

a) Cho a,b là hai số dương. Chứng minh rằng:

i. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ **ii.** $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}(a+5b+2)$

i. Ta chứng minh bằng phép biến đổi tương đương:

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}\ge 0\Leftrightarrow\frac{b(a+b)+a(a+b)-4ab}{ab(a+b)}\ge 0$

Hơn nữa: $b(a+b)+a(a+b)-4ab=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\ge 0$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

ii. Ta cần chứng minh

$16(a^2-ab+3b^2+1)\ge(a+5b+2)^2\Leftrightarrow 15a^2+23b^2-26ab-4a-20b+12\ge 0$.

Mặt khác, $15a^2+13b^2-26ab-4a-20b+12=13(a-b)^2+10(b-1)^2+2(a-1)^2\ge 0$ nên bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}(a+5b+2)$ ta được:

$$P\le\frac{4}{a+5b+2}+\frac{4}{b+5c+2}+\frac{4}{c+5a+2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b},\forall a,b>0$ ta được:

$$\frac{4}{a+5b+2}\le\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{4b}\qquad(1)$$

$$\frac{4}{b+5c+2}\le\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{4c}\qquad(2)$$

$$\frac{4}{c+5a+2}\le\frac{1}{c+a+2}+\frac{1}{4a}\qquad(3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có:

$$P \le \left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \qquad (*).$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b},\forall a,b>0$ ta có:

$$\frac{1}{a+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\right] \qquad (4)$$

$$\frac{1}{b+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\right] \qquad (5)$$

$$\frac{1}{c+a+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\right] \qquad (6)$$

Từ $(*),(4),(5),(6)$ ta được: $P\le\frac{3}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3}{8}\le\frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=c=1$

Câu 19. *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2020-2021)*

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le -2$ biết $\begin{cases}x^3+y^3+3(x^2+y^2)+4(x+y)+4=0\\ xy>0\end{cases}$

b) Cho ba số thực x,y,z dương thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh: $\frac{x^2y}{x+1}+\frac{y^2z}{y+1}+\frac{z^2x}{z+1}\ge 2xyz$

Lời giải

a) Ta có: $x^3 + y^3 + 3(x^2+y^2) + 4(x+ y) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + 4(x+y) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - xy + y^2)(x + y + 2) + (x + y + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + y + 2)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y + 2). \left[(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2+2\right]= 0$

(vì $\left[(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2+2\right]> 0$)

$\Leftrightarrow x + y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x + y = -2$, mà $x.y > 0$ nên $x < 0$, $y < 0$

Áp dụng BĐT CauChy ta có $\sqrt{(-x)(-y)}\le\frac{(-x)+(-y)}{2}=\frac{-(x+y)}{2}=\frac{2}{2}=1$

Do đó $xy \le 1 \Leftrightarrow 1\le \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \frac{-2}{xy} \le -2$

Mà $M=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{-2}{xy}$

Vậy $M=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le -2$ dấu bằng xảy ra khi $x=y=-1$

b) Xét $VT=\frac{x^2y^2}{xy+y}+\frac{y^2z^2}{yz+z}+\frac{z^2x^2}{xz+x}\ \geq \frac{(xy+yz+zx)^2}{xy+yz+zx+x+y+z}$ (1)

Ta có $xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$.

Đặt $t=xy+yz+zx$, từ giả thiết có: $(1-t)^2=4x^2y^2z^2\leq \frac{4t^3}{27}\Leftrightarrow t\geq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx\geq \frac{3}{4}$

Thay vào giả thiết được: $2xyz=1-(xy+yz+zx)\leq \frac{1}{4}$ hay $xyz\leq \frac{1}{8}$

Do đó $xy+yz+zx\geq 6xyz$

$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2\geq 6xyz(xy+yz+zx)$ (2)

Mặt khác: $(xy+yz+zx)^2\geq 3(xy.yz+yz.zx+zx.xy)\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)^2\geq 6xyz(x+y+z)$ (3)

Cộng vế (2) và (3) có: $3(xy+yz+zx)^2\geq 6xyz(xy+yz+zx+x+y+z)$ (4)

Kết hợp (1) và (4) ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi toán năm 2020-2021)*

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2x}{x^2+1}$.

Lời giải

Ta có biểu thức xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Do đó

$P=\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow P.x^2-2x+P=0$ $(*)$

(+) Nếu $P=0$ thì $x=0$.

(+) Xét $P\neq 0$, ta có pt $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=1-P^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq P\leq 1$.

Vậy $\min P=-1$ và $\max P=1$.

Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2020-2021)*

Với các số thực dương a và b thay đổi, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=(a+b)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-ab+2a^2}}\right).$$

Lời giải

$$S^2 \le 2(a+b)^2\left(\frac{1}{a^2-ab+2b^2}+\frac{1}{b^2-ab+2a^2}\right)=\frac{2(a+b)^2\left(3a^2+3b^2-2ab\right)}{2a^4-3a^3b+6a^2b^2-3ab^3+2b^4}$$

$$=\frac{2\left(a^2+2ab+b^2\right)\left(3a^2+3b^2-2ab\right)}{2\left(a^2+b^2\right)^2-3ab\left(a^2+b^2\right)+2a^2b^2}.$$ Do đó $$S^2 \le \frac{2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+2\right)\left(\frac{3\left(a^2+b^2\right)}{ab}-2\right)}{2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2-3\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)+2}.$$

Đặt $t=\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$, ta được $S^2 \le \frac{2(t+2)(3t-2)}{2t^2-3t+2}$

Ta chứng minh được $\frac{2(t+2)(3t-2)}{2t^2-3t+2}\le 8$ (1). Thật vậy

$(1)\Leftrightarrow 3t^2+4t-4\le 8t^2-12t+8 \Leftrightarrow (t-2)(5t-6)\ge 0$ đúng $\forall t\ge 2$

Do đó $S\le 2\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$. Vậy $\max S=2\sqrt{2}$.

Câu 22. *(Trường chuyên tỉnh Yên Bái năm 2020-2021)*

Cho các số thực a,b,c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P=\sqrt{\left(\frac{2a}{a+b}\right)\left(\frac{2a}{a+c}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}\right)\left(\frac{2b}{b+a}\right)}+\sqrt{\left(\frac{2c}{c+a}\right)\left(\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}+\frac{2b}{b+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2c}{c+a}+\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{b+a}\right)+\left(\frac{2a}{a+c}+\frac{2c}{c+a}\right)+\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}+\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(2+2+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{2a}{a+b}=\frac{2a}{a+c}\\ \frac{\frac{b}{2}}{b+c}=\frac{2b}{b+a}\\ \frac{\frac{c}{2}}{c+b}=\frac{2c}{c+a}\end{cases}\Leftrightarrow a=7b=7c$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\frac{9}{4}$ khi $a=7b=7c$.

Câu 23. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh :

$$\frac{a}{ca+4}+\frac{b}{ab+4}+\frac{c}{bc+4}\le\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Lời giải

Vì a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$ nên tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho $a=\frac{2x}{y};b=\frac{2y}{z};c=\frac{2z}{x}$.

Bất đẳng thức trở thành $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}$

$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\ge\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\ge3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\quad(2)$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}.\frac{y}{z}+\frac{y}{z}.\frac{z}{x}+\frac{z}{x}.\frac{x}{y}=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\quad(3)$$

Từ (2) và (3) có

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$$

Lại có

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$\ge\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}$$

Ta có bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Câu 24. *(Trường chuyên Điện Biên năm 2020-2021)*

Cho hai số $a,\,b$ thỏa mãn $a>b>0$ và $a.b=1$. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2}{a-b}\ge2\sqrt{2}$.

Lời giải

Vì $a.b=1\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2}{a-b}=(a-b)+\frac{2}{(a-b)}$

Do $a>b>0\Rightarrow(a-b)+\frac{2}{(a-b)}\ge2\sqrt{(a-b).\frac{2}{(a-b)}}=2\sqrt{2}$ (BĐT AM-GM)

Dấu bằng xảy ra khi: $(a-b)=\frac{2}{(a-b)}\Leftrightarrow(a-b)^2=2\Leftrightarrow a-b=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow a-\frac{1}{a}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}a=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} & (t/m)\\ a=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} & (Loai)\end{array}\right.\Rightarrow b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}\geq 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Câu 25. *(Trường chuyên toán Vĩnh Long năm 2020-2021)*

Cho x, y là các số thực dương và $x+y\leq 1$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{x^3+y^3}{2}\geq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\dfrac{1}{y}\right)^3$.

Lời giải

a) Ta có

$\dfrac{x^3+y^3}{2}\geq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3\Leftrightarrow 4\left(x^3+y^3\right)\geq\left(x+y\right)^3\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(x-y\right)^2\geq 0$ (luôn đúng).

b) Ta có $P=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\dfrac{1}{y}\right)^3\geq 2.\left(\dfrac{1+x+\dfrac{1}{x}+1+y+\dfrac{1}{y}}{2}\right)^3\geq 2.\dfrac{\left(2+x+y+\dfrac{4}{x+y}\right)^3}{8}$

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a\leq 1$, ta được

$$P\geq\frac{1}{4}.\left(2+a+\frac{4}{a}\right)^3=\frac{1}{4}.\left(2+a+\frac{1}{a}+\frac{3}{a}\right)^3\geq\frac{1}{4}.\left(4+\frac{3}{a}\right)^3\geq\frac{1}{4}.\left(4+\frac{3}{1}\right)^3=\frac{343}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{343}{4}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Cho các số dương $x,\ y,\ z$ thoả mãn $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\geq 2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\dfrac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\dfrac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}$.

Lời giải

Với hai số dương x, y ta có $2(x-y)^2\geq 0$, đẳng thức xảy ra khi $x=y$.

Ta có $2(y-x)^2\geq 0\Leftrightarrow 3y^2+6x^2\geq y^2+4xy+4x^2\Leftrightarrow 3\left(y^2+2x^2\right)\geq\left(y+2x\right)^2$

và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$.

Do đó $\sqrt{y^2+2x^2} \geq \frac{y+2x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy} \geq \frac{y+2x}{\sqrt{3}xy} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)$ (1)

Tương tự $\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$ (2), $\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{x}\right)$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được

$$\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx} \geq \sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Với $x, y, z > 0$ ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}; \frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z}; \frac{1}{z}+\frac{1}{x} \geq \frac{4}{z+x}$

Nên $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geq 4.2020$ hay $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 4040$

Suy ra $P \geq 4040\sqrt{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{4040}$.

Vậy GTNN của P cần tìm là $4040\sqrt{3}$, khi $x=y=z=\frac{3}{4040}$.

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2020-2021)*

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=5$. Chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+5}}+\frac{3z}{\sqrt{6\left(z^2+5\right)}} \leq \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Lời giải

$$P=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{3z}{\sqrt{6(z+x)(z+y)}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{x+y}\cdot\frac{3}{x+z}}+\frac{y}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{3}{y+z}\cdot\frac{2}{y+x}}+\frac{3z}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{1}{z+x}\cdot\frac{1}{z+y}}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{2x}{x+y}+\frac{3x}{x+z}+\frac{3y}{y+z}+\frac{2y}{y+x}+\frac{3z}{z+x}+\frac{3z}{z+y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{6}}(2+3+3)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{2}{x+y}=\frac{3}{y+z}=\frac{3}{z+x} \\ xy+yz+zx=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=2x=2y \\ 5x^2=5\end{cases} \Leftrightarrow z=2x=2y=2$

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2020-2021)*

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P \ge 3.\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}} = 3\sqrt[6]{\frac{a+b}{c+ab}\cdot\frac{b+c}{a+bc}\cdot\frac{c+a}{b+ca}}$$

Mặt khác: Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(c+ab)(a+bc) \le \left[\frac{(c+ab)+(a+bc)}{2}\right]^2 = \frac{(c+a)^2(b+1)^2}{4}$$

Chứng minh tương tự, ta có $(a+bc)(b+ca) \le \dfrac{(a+b)^2(c+1)^2}{4}$;

$$(b+ca)(c+ab) \le \frac{(b+c)^2(a+1)^2}{4}$$

Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên và thu gọn ta được

$$(c+ab)(a+bc)(b+ca) \le \frac{(a+b)(b+c)(c+a)(a+1)(b+1)(c+1)}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)} \ge \frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Mà $\dfrac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)} \ge \dfrac{8}{\left(\dfrac{a+b+c+3}{3}\right)^3} = 1$

(Vì $(a+1)(b+1)(c+1) \le \left(\dfrac{a+b+c+3}{3}\right)^3$)

Do đó $P \ge 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy $P_{min} = 3$ khi $a=b=c=1$

Câu 29. *(Đề dự bị trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2020-2021)*

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz \ge 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}} + \dfrac{y}{\sqrt{y+\sqrt{zx}}} + \dfrac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}} \ge \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

$$\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}} + \frac{y}{\sqrt{y+\sqrt{zx}}} + \frac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b, \sqrt{z} = c$ suy ra a,b,c dương và $abc \ge 1$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{b^2+ca}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}} \ge \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}}\right)^2 \ge \frac{(a+b+c)^4}{\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right)^2}$$

Mặt khác: Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right)^2 \le 3\left(a^2+bc+b^2+ca+c^2+ab\right)$$

$$=3\left[(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\right] \le 3(a+b+c)^2-9$$

(vì $ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 3$)

Do đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chứng minh được

$$\frac{(a+b+c)^4}{3(a+b+c)^2-9} \ge \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2t^2-27t+81 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (2t-9)(t-9) \ge 0$ (luôn đúng). (vì $t=(a+b+c)^2 \ge \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2 \ge 9$)

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Cho các số thực $a,\ b,\ c$ sao cho: $a \ge 0;\ b \ge \frac{3}{2};\ c \ge 5$ và $a^2+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{9} \le 12$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M=\sqrt{2ab-3a}+\sqrt{ca+8c}+2\sqrt{c-5}$.

Lời giải

$\sqrt{2ab-3a}=\sqrt{a(2b-3)} \le \frac{a+2b-3}{2}$; $\sqrt{c(a+8)} \le \frac{c+a+8}{2}$

$2\sqrt{c-5}=\sqrt{4(c-5)} \le \frac{4+c-5}{2}$

Suy ra: $M \le a+b+c+2$

Ta có: $a \le \frac{a^2+1}{2}$; $b \le \frac{b^2+4}{4}$; $c \le \frac{c^2+81}{18}$

Suy ra: $a+b+c \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{18}+6 \le 12$

Suy ra : $M \le 14$

Giá trị lớn nhất của M là 14 (Khi $a=1, b=2, c=9$)

Câu 31. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình năm 2020-2021)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $3a^2+3b^2+8c^2=32$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca$.

Lời giải

Với a,b là các số thực dương ta chứng minh được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$ (1)

Thật vậy: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}\ge\frac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow(a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$ luôn đúng

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$

Ta có: $xy\le\frac{\left(x+y\right)^2}{4}\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{2xy}\ge 2\ \left(2\right)$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y$.

$$Q=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{5}{2xy}$$

Áp dụng (1) và (2) vào Q ta được: $Q\ge\frac{4}{(x+y)^2}+2.5\ge 4+10=14$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}x=y\\ x^2+y^2=2xy\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.\\ x+y=1\end{cases}$

Vậy GTNN của Q là 14 khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình toán chuyên năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\left(a-1\right)^3+\left(b-1\right)^3+\left(c-1\right)^3$.

Lời giải

Ta có : $\left(a-1\right)^3=a^3-3a^2+3a-1=a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a-1\ge\frac{3}{4}a-1\ (1)$

(do $a\ge 0$)

Tương tự: $\left(b-1\right)^3\ge\frac{3}{4}b-1\ (2)$; $\left(c-1\right)^3\ge\frac{3}{4}c-1\ (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $T\ge\frac{3}{4}\left(a+b+c\right)-3=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=0,\ b=c=\frac{3}{2}$ hoặc $b=0,\ a=c=\frac{3}{2}$

hoặc $c=0,\ a=b=\frac{3}{2}$.

Vậy GTNN của T bằng $-\frac{3}{4}$ khi $a=0,\ b=c=\frac{3}{2}$ hoặc $b=0,\ a=c=\frac{3}{2}$ hoặc $c=0,\ a=b=\frac{3}{2}$.

Câu 33. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2020-2021)*

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $M=x+2y$.

Lời giải

$x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27 \Leftrightarrow (x+2y)^2+3(x+2y)+(y-1)^2=28$

$\Leftrightarrow \left(x+2y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{121}{4}-(y-1)^2$

Vậy $\left(x+2y+\frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{121}{4} \Leftrightarrow \left|x+2y+\frac{3}{2}\right| \le \frac{11}{2} \Leftrightarrow -7 \le x+2y \le 4$

Vậy M lớn nhất là 4 khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, M nhỏ nhất là -7 khi $\begin{cases} x=-9 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 34. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+3b+5c=2020$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3ab}{a+3b}+\frac{15bc}{3b+5c}+\frac{5ca}{5c+a}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a và $3b$ ta có:

$$\frac{3ab}{a+3b} \le \frac{\left(\frac{a+3b}{2}\right)^2}{a+3b}=\frac{a+3b}{4}$$

CMTT ta có:

$$\frac{15bc}{3b+5c} \le \frac{3b+5c}{4};\ \frac{5ca}{5c+a} \le \frac{5c+a}{4}$$

Từ đó suy ra: $P \le \frac{2(a+3b+5c)}{4}=1010$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1010 khi và chỉ khi $a=3b=5c=\frac{2020}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2020}{3} \\ b=\frac{2020}{9} \\ c=\frac{404}{3} \end{cases}$.

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2020-2021)*

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}>5$.

Lời giải

a) Áp dụng BĐT: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$.

Ta có $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{4}{c\left(a+b\right)}$.

Mặt khác $\frac{4}{c(a+b)}\ge\frac{4}{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2}=1$

(vì $4c\left(a+b\right)\le\left(a+b+c\right)^2\Leftrightarrow c(a+b)\le\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$ *)*

Vậy $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\ge1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $c=2, a=b=1$.

b) Đặt $S_1=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}$

Xét biểu thức $S_2=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$.

Ta có $S_1+S_2=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$

$S_1+S_2=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{121}-\sqrt{120}=\sqrt{121}-1=10$

Mặt khác dễ dàng chứng minh được:

$\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}}>\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}}, \forall k\ge1, k\in N$

$\Rightarrow S_1>S_2$.

Vậy $S_1>5$,

hay $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}>5$. *(đpcm).*

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Hậu Giang năm 2020-2021)*

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=1+\dfrac{3}{xy+yz+xz}$.

Lời giải

Dễ thấy với mọi số thực dương a và b, ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (*)

Áp dụng (*), với $a=1$ và $b=\dfrac{3}{xy+yz+xz}$, ta có $P\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{xy+yz+xz}}$ (**)

Với các số thực $x, y, z,$ ta luôn có: $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+xz$.

Suy ra $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+xz)$ hay $\dfrac{3}{xy+yz+xz}\ge\dfrac{3^2}{(x+y+z)^2}$ (***)

Từ (**) và (***), ta suy ra $P\ge 2\sqrt{\dfrac{3^2}{(x+y+z)^2}}=\dfrac{6}{x+y+z}=\dfrac{6}{3}=2$.

$P=2\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $P_{\min}=2$ là giá trị nhỏ nhất.

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

a) Cho các số thực *x, a, b, c* thay đổi, thỏa mãn: $\begin{cases}x+a+b+c=7\\x^2+a^2+b^2+c^2=13\end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của *x*.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{3x^2-4x+8}{x^2+2}$

Lời giải

$x+a+b+c=7 \Rightarrow a+b+c=7-x$.

$x^2+a^2+b^2+c^2=13 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=13-x^2$.

Ta có: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2-a^2-b^2-c^2-2ab-2ac-2bc\ge 0$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\ge (a+b+c)^2$.

Suy ra $3(13-x^2)\ge (7-x)^2$

$\Leftrightarrow 3(13-x^2)\ge 49-14x+x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2-14x+10\le 0$

$\Leftrightarrow 1\le x\le\dfrac{5}{2}$.

$x=\dfrac{5}{2}$ khi $a=b=c=\dfrac{3}{2}$, $x=1$ khi $a=b=c=2$.

Vậy Max $x=\dfrac{5}{2}$ khi $a=b=c=\dfrac{3}{2}$

b) + Ta có: $P=\dfrac{3x^2-4x+8}{x^2+2}=\dfrac{2\left(x^2+2\right)+\left(x-2\right)^2}{x^2+2}=2+\dfrac{\left(x-2\right)^2}{x^2+2}\geq 2,\forall x$

$\Rightarrow$ $\mathrm{P}_{\min}=2$ khi và chỉ khi $\mathrm{x}=2$

+ Ta có: $P=\dfrac{3x^2-4x+8}{x^2+2}=\dfrac{5\left(x^2+2\right)-2\left(x+1\right)^2}{x^2+2}=5-\dfrac{2\left(x+1\right)^2}{x^2+2}\leq 5,\ \forall x$

$\Rightarrow \mathrm{P}_{\max}=5$ khi và chỉ khi $\mathrm{x}=-1$

Chuyên đề 3

Phương trình, Hệ Phương Trình

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2020-2021)*

1. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x-1}+5x=13$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-xy+2x^2-2y=0 \\ \dfrac{(x+y-2)\sqrt{x+1}}{x-2}=y(x-5)+9x-5 \end{cases}$.

Lời giải

1. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x-1}+5x=13$.

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x-1}=13-5x$

Điều kiện: $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ và $13-5x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{13}{5}$

Nên $1\leq x<\dfrac{13}{5}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2\sqrt{x-1}^2=(13-5x)^2$

$\Leftrightarrow x^3+x^2-x-1=169-130x+25x^2$

$\Leftrightarrow x^3-24x^2+129x-170=0$

$\Leftrightarrow x^3-17x^2-7x^2+119x+10x-170=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-7x+10)-17(x^2-7x+10)=0$

$\Leftrightarrow (x-17)(x^2-5x-2x+10)=0$

$\Leftrightarrow (x-17)(x-5)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x_1=17, x_2=5, x_3=2$

Đối chiếu ĐK trên ta có $x=2$ là nghiệm của phương trình.

2. $\begin{cases} x^3-xy+2x^2-2y=0 \\ \dfrac{(x+y-2)\sqrt{x+1}}{x-2}=y(x-5)+9x-5 \end{cases}$

Điều kiện: $x\geq -1; x\neq 2$

Xét $x^3-xy+2x^2-2y=0 \Leftrightarrow x(x^2-y)+2(x^2-y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(\text{loai}) \\ x^2=y \end{array}\right.$

Thế $x^2=y$ vào phương trình $\dfrac{(x+y-2)\sqrt{x+1}}{x-2}=y(x-5)+9x-5$ ta có:

$$\frac{(x+x^2-2)\sqrt{x+1}}{x-2}=x^2(x-5)+9x-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)\sqrt{x+1}}{x-2}=(x-1)(x^2-4x+5)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(TM) \\ \dfrac{(x+2)\sqrt{x+1}}{x-2}=(x^2-4x+5) \end{array}\right.$$

Xét $\dfrac{(x+2)\sqrt{x+1}}{x-2}=(x^2-4x+5)\Leftrightarrow\left[(x+1)+1\right]\sqrt{x+1}=\left[(x+1)^2+1\right](x-2)$

Đặt: $\sqrt{x+1}=a; x-2=b$ ta có phương trình:

$(a^2+1)a=(b^2+1)b$

$\Leftrightarrow a^3+a-b^3-b=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0$

$\Leftrightarrow a=b$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-2\Leftrightarrow x+1=(x-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2-5x+3=0$

Phương trình có hai nghiệm là : $\Leftrightarrow x_1=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}; x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

Lúc đó $y_1=\dfrac{(5-\sqrt{13})^2}{4}; y_2=\dfrac{(5+\sqrt{13})^2}{4}$

Với $\Leftrightarrow x_3=1: y_3=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(1;1);(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2};\dfrac{(5-\sqrt{13})^2}{4});(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\dfrac{(5+\sqrt{13})^2}{4})$

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2020-2021)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ x^4+y^2-2x^2-4y=5 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ x^4+y^2-2x^2-4y=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2(y+2)+3(y+2)=21 \\ x^4-2x^2+1-1+y^2-4y+4-4=5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (y+2)(x^2+3)=21 \\ (x^2-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases}\quad (I)$$

Đặt $u=x^2-1; v=y-2$, hệ (I) trở thành: $\begin{cases} (u+4)(v+4)=21 \\ u^2+v^2=10 \end{cases}\quad (II)$

Giải hệ $\begin{cases}(u+4)(v+4)=21\\ u^2+v^2=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}uv+4(u+v)=5\\ (u+v)^2-2uv=10\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2+8(u+v)-20=0\\ uv+4(u+v)=5\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u+v=2\\ uv=-3\end{cases}\\ \begin{cases}u+v=-10\\ uv=45\end{cases}\end{array}\right.$$

+) Với $\begin{cases}u+v=2\\ uv=-3\end{cases}$ thì u,v là nghiệm của phương trình $t^2-2t-3=0$. suy ra (u,v) là $(-1;3);(3;-1)$.

+) Với $\begin{cases}u+v=-10\\ uv=45\end{cases}$ thì u,v là nghiệm của phương trình $t^2+10t-45=0$ suy ra (u,v) là $\left(-5+4\sqrt{5};-5-4\sqrt{5}\right);\left(-5-4\sqrt{5};-5+4\sqrt{5}\right)$.

Vậy hệ (II) có các nghiệm là: $(-1;3);(3;-1)$; $\left(-5+4\sqrt{5};-5-4\sqrt{5}\right);\left(-5-4\sqrt{5};-5+4\sqrt{5}\right)$.

+ Với $\begin{cases}u=-1\\ v=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-1=-1\\ y-2=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=5\end{cases}$. Nghiệm $(x;y)=(0;5)$.

+ Với $\begin{cases}u=3\\ v=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-1=3\\ y-2=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\pm 2\\ y=5\end{cases}$. Nghiệm $(2;5);(-2;5)$.

+ Với $\begin{cases}u=-5+4\sqrt{5}\\ v=-5-4\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-1=-5+4\sqrt{5}\\ y-2=-5-4\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\pm\sqrt{4\sqrt{5}-4}\\ y=-3-4\sqrt{5}\end{cases}$. Có hai nghiệm.

+ Với $\begin{cases}u=-5+4\sqrt{5}\\ v=-5-4\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-1=-5-4\sqrt{5}\\ y-2=-5+4\sqrt{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=-4-4\sqrt{5}\\ y=-3+4\sqrt{5}\end{cases}$. Vô nghiệm.

Vậy hệ (I) có 5 nghiệm.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bình Dương năm 2020-2021)*

Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2020}-\sqrt{x-2019}\right)\left(1+\sqrt{x^2+x-2019.2020}\right)=4039$.

Lời giải

$\left(\sqrt{x+2020}-\sqrt{x-2019}\right)\left(1+\sqrt{x^2+x-2019.2020}\right)=4039$.

ĐKXĐ: $x\ge 2019$.

Đặt $a=\sqrt{x+2020}\quad (a>0), b=\sqrt{x-2019}\quad (b\ge 0)$.

Phương trình trở thành $(a-b)(1+ab)=a^2-b^2$

$\Leftrightarrow (a-b)(1+ab)=(a-b)(a+b) \Leftrightarrow (a-b)(1+ab-a-b)=0$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=1 \\ b=1 \end{array}\right. .$$

+) Nếu $a=b \Leftrightarrow \sqrt{x+2020}=\sqrt{x-2019}$ (vô nghiệm).

+) Nếu $a=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2020}=1 \Leftrightarrow x=-2019$ (loại).

+) Nếu $b=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2019}=1 \Leftrightarrow x=2020$ (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2020$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Nông chuyên toán năm 2020-2021)*

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

2.Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{y+5}=1 \\ y+\sqrt{x+5}=1 \end{cases}$

Lời giải

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

ĐKXĐ: $x \geq -1$

$4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$

$\Rightarrow 4\sqrt{x+1}-x-5=x^2-6x+9$

$$\Leftrightarrow \frac{16(x+1)-(x+5)^2}{4\sqrt{x+1}+x+5}=(x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{16x+16-x^2-10x-25}{4\sqrt{x+1}+x+5}-(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-9}{4\sqrt{x+1}+x+5}-(x-3)^2=0 \Leftrightarrow \frac{-(x-3)^2}{4\sqrt{x+1}+x+5}-(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(\frac{-1}{4\sqrt{x+1}+x+5}-1\right)=0 \text{ (do } \frac{-1}{4\sqrt{x+1}+x+5}-1<0\text{)}$$

$\Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$

Thử lại $x=3$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$

2.Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{y+5}=1 \\ y+\sqrt{x+5}=1 \end{cases}$.(*)

Điều kiện xác định: $x \geq -5; y \geq -5$

$$\begin{cases} x+\sqrt{y+5}=1 \text{ (1)} \\ y+\sqrt{x+5}=1 \text{ (2)} \end{cases}$$

$\Rightarrow x+\sqrt{y+5}-y-\sqrt{x+5}=0$

$\Leftrightarrow (x+5)-(y+5)+(\sqrt{y+5}-\sqrt{x+5})=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5}-\sqrt{y+5})(\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5})+(\sqrt{y+5}-\sqrt{x+5})=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5}-\sqrt{y+5})(\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}-\sqrt{y+5}=0\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}=\sqrt{y+5}\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=1\end{array}\right.$$

Xét $\sqrt{x+5}=\sqrt{y+5} \Leftrightarrow x=y$ thay vào phương trình (2) ta có:

$y+\sqrt{y+5}=1 \Leftrightarrow \sqrt{y+5}=1-y$, điều kiện $-5\le y\le 1$

$$\Rightarrow y+5=1-2y+y^2 \Leftrightarrow y^2-3y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\ (TM)\\ y=4\ \ (KTM)\end{array}\right.$$

Với $y=-1 \Rightarrow x=-1$.

Xét $\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=1 \Leftrightarrow \sqrt{y+5}=1-\sqrt{x+5}$

(1) trở thành $x+1-\sqrt{x+5}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+5}=x$, điều kiện $0\le x, 0\le \sqrt{x+5}\le 1$

$$\Leftrightarrow x^2-x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\ (KTM)\\ x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\ (KTM)\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của (*) là: $S=\{(-1,-1)\}$.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2020-2021)*

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-2x^2y=1\\ 2x^2+y^2-2y=2\end{cases}$.

2. Giải phương trình $2(x-2)\sqrt{x+2}=-x^2+3x+3$

Lời giải

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-2x^2y=1\\ 2x^2+y^2-2y=2\end{cases}$.

$$\begin{cases}x^4-2x^2y=1\\ 2x^2+y^2-2y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^4-2x^2y+y^2=1+y^2\\ 2(x^2-y)+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-y)^2=1+y^2 & (1)\\ 2(x^2-y)+y^2=2 & (2)\end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được: $(x^2-y)^2+2(x^2-y)+y^2=1+y^2+2$

$\Leftrightarrow (x^2-y)^2+2(x^2-y)=3$

Đặt $x^2-y=t$, ta thu được $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow (t+3)(t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3\end{array}\right.$.

+) Với $t=-3$ hay $x^2-y=-3$ thay vào (2) ta được:

$$\begin{cases} 2.(-3)+y^2=2 \\ x^2-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=8 \\ x^2-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2\sqrt{2} \\ x^2=-3+2\sqrt{2}<0 \text{ (vô lý)} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-2\sqrt{2} \\ x^2=-3-2\sqrt{2}<0 \text{ (vô lý)} \end{cases} \end{array}\right.$$

+) Với $t=1$ hay $x^2-y=1$ thay vào (2) ta được:

$$\begin{cases} 2.1+y^2=2 \\ x^2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x^2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn phương trình là $(1;0)$ hoặc $(-1;0)$.

2. Giải phương trình $2(x-2)\sqrt{x+2}=-x^2+3x+3 \quad (*)$

Điều kiện xác định: $x\ge -2$.

$(*)\Leftrightarrow x^2-3x+2(x-2)\sqrt{x+2}=3$

$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)+2(x-2)\sqrt{x+2}+(x+2)=9$.

$\Leftrightarrow \left(x-2+\sqrt{x+2}\right)^2=9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2+\sqrt{x+2}=3 \\ x-2+\sqrt{x+2}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x+2}=5 \\ x+\sqrt{x+2}=-1 \end{array}\right.$$

+) TH1: $x+\sqrt{x+2}=5 \Rightarrow \sqrt{x+2}=5-x \quad (1)$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ x^2-11x+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ x=\dfrac{11\pm\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{11-\sqrt{29}}{2}.$$

+) TH2: $x+\sqrt{x+2}=-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-1-x \quad (2)$

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$ và $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Giải phương trình: $x^2+2\sqrt{x-1}-2x\sqrt{2-x}+1=0$.

Lời giải

Điều kiện xác định : $1\le x\le 2$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$\left(x^2-2x\sqrt{2-x}+2-x\right)+(x-1)+2\sqrt{x-1}+1=1$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2-x}\right)^2+\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2=1$

Ta có:

$\left(x-\sqrt{2-x}\right)^2 \geq 0 \ \forall x \in [1,2]$

$\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 \geq 1 \ \forall x \in [1,2]$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}+1=1 \\ x-\sqrt{2-x}=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$(thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2020-2021)*

$x^2+2\sqrt{x-1}-2x\sqrt{2-x}+1=0$

Lời giải

Điều kiện xác định : $1 \leq x \leq 2$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$\left(x^2-2x\sqrt{2-x}+2-x\right)+\left(x-1\right)+2\sqrt{x-1}+1=1$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2-x}\right)^2+\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2=1$

Ta có:

$\left(x-\sqrt{2-x}\right)^2 \geq 0 \ \forall x \in [1,2]$

$\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 \geq 1 \ \forall x \in [1,2]$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}+1=1 \\ x-\sqrt{2-x}=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$(thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Lạng Sơn năm 2020-2021)*

Giải phương trình $\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x+4}=3$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-3}=a \\ \sqrt[3]{x+4}=b \end{cases}$ $\left(ĐK: x \geq 3; a \geq 0\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^2-b^3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}=1 \\ \sqrt[3]{x+4}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=4$.

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4 \end{cases}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq -3$

$2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$

$\Rightarrow \left(2x^2+x+3\right)^2=\left(3x\sqrt{x+3}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4x^4-5x^3-14x^2+6x+9=0$

$\Leftrightarrow 4x^4-4x^3+x^3+x^2-15x^2+15x-9x+9=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(4x^3-x^2-15x-9\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(4x^3+3x^2-4x^2-3x-12x-9\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(4x+3)\left(x^2-x-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+3=0 \\ x-1=0 \\ x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3}{4}(l) \\ x=1 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}(l) \end{array}\right.$$

Thử nghiệm với kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm của phương trình là:

$S=\left\{1,\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

b) ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{-1}{2}, y \geq \dfrac{-1}{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) tương đương với:

$(x+y)(x+2y)-(x+2y)+4(x+y-1)=0$

$(x+y-1)(x+2y)+4(x+y-1)=0$

$(x+y-1)(x+2y+4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x+2y+4=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-y \\ x=-4-2y \end{array}\right.$

Xét $x=1-y$ thay vào phương trình (1) ta có phương trình (1) thành:

$$\sqrt{2(1-y)+1}+\sqrt{2y+1}=\frac{((1-y)-y)^2}{2}$$

$$\sqrt{3-2y}+\sqrt{2y+1}=\frac{(1-2y)^2}{2}$$

Đặt $t=1-2y$ phương trình trở thành:

$$\sqrt{2-t}+\sqrt{2+t}=\frac{t^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-t^2}=\frac{t^4}{4}$$

$$\Leftrightarrow 16-t^4+8\sqrt{4-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-t^2}\left(\sqrt{4-t^2}\left(4+t^2\right)+8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-t^2}=0 \text{ (vì } \left(\sqrt{4-t^2}\left(4+t^2\right)+8\right)>0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2y=2 \\ 1-2y=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $y=\dfrac{-1}{2}$ thì $x=1-y=1-\dfrac{-1}{2}=\dfrac{3}{2}$

Với $y=\dfrac{3}{2}$ thì $x=1-y=1-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$

Xét $x+2y+4=0$:

Vì $x\ge\dfrac{-1}{2}, y\ge\dfrac{-1}{2}$ nên $x+2y+4\ge 2,5$

Nên $x+2y+4=0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là:

$$S=\left(x,y\right)=\left\{\left(\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)\right\}$$

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình: $5x^2+6x+4=3(x+1)\sqrt{3x^2+4}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2+y^2+2xy=11y \\ y(2x+y)^2=2x^2+13y+4 \end{cases}$.

Lời giải

a) Giải phương trình: $5x^2+6x+4=3(x+1)\sqrt{3x^2+4}$

Phương trình tương đương: $3x^2+4-3(x+1)\sqrt{3x^2+4}+2x^2+6x=0$

Đặt $t=\sqrt{3x^2+4}\Rightarrow t^2-3(x+1)t+\left(2x^2+6x\right)=0$

Ta có $\Delta = 9(x+1)^2 - 4\left(2x^2+6x\right) = x^2-6x+9 = (x-3)^2$. Do đó $\left[\begin{array}{l} t=2x \\ t=x+3 \end{array}\right.$

Với $t=2x$ ta có $\sqrt{3x^2+4} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Với $t=x+3$ ta có $\sqrt{3x^2+4} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ 2x^2-6x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{19}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2; x=\dfrac{3\pm\sqrt{19}}{2}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2+y^2+2xy=11y \\ y(2x+y)^2 = 2x^2+13y+4 \end{cases}$

+ Với $y=0$ (không thỏa mãn)

+ Xét $y \ne 0$. Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^2+2+2xy+y^2=11y \\ y(2x+y)^2 = 2\left(x^2+2\right)+13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2}{y}+2x+y=11 \\ (2x+y)^2 = \dfrac{2\left(x^2+2\right)}{y}+13 \end{cases}$$

Đặt $u=2x+y; v=\dfrac{x^2+2}{y} \Rightarrow \begin{cases} u+v=11 \\ u^2-2v=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-7 \\ v=18 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2+2=6y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-14 \\ y=33 \end{cases} \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} u=-7 \\ v=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-7 \\ x^2+2=18y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-7 \\ x^2+36x+128=0 \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-32 \\ y=57 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(2;1);(-4;1);(-14;33);(-32;57)$.

Câu 11. *(Trường chuyên Quảng Nam chuyên năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình: $\left(\sqrt{2-x}+1\right)^2 = 3x+1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+x=5 \\ x^2y+xy^2+y^2+5x+xy+5y=2. \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\sqrt{2-x}+1\right)^2 = 3x+1.(1)$

Điều kiện: $\begin{cases}2-x\ge 0\\3x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\x\ge\dfrac{-1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{-1}{3}\le x\le 2$.

$(1)\Leftrightarrow 2-x+1+2\sqrt{2-x}=3x+1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=3x+1-3+x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=4x-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}=2x-1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le x\le 2\\2-x=4x^2-4x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(4x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)=0$ hoặc $(4x+1)=0$

$\Rightarrow x=1$ (thoả mãn) hoặc $x=\dfrac{-1}{4}$ (loại)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+xy+x=5(1)\\x^2y+xy^2+y^2+5x+xy+5y=2.(2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+xy+x=5\\xy(x+y)+y(x+y)+5(x+y)=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+xy+x=5\\(xy+y+5)(x+y)=2\end{cases}$

$\Rightarrow (xy+y+x^2+y^2+xy+x)(x+y)=2$

$\Leftrightarrow \left[(x+y)^2+x+y\right](x+y)=2$

$\Leftrightarrow (x+y)^3+(x+y)^2-2=0$

Đặt $(x+y)=a$ Ta có $a^3+a^2-2=0\Rightarrow (a-1)(a^2+2a+2)=0$

Vì $(a^2+2a+2)=(a^2+2a+1+1)=(a+1)^2+1>0$ Nên $a-1=0\Leftrightarrow a=1$ hay $x+y=1$

$\Rightarrow (x+y)^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=1\Rightarrow x^2+y^2=1-2xy$ thay vào (1) ta có :

$1-2xy+xy+x=5\Rightarrow -xy+x=4\Rightarrow x(1-y)=4$ Mà $x+y=1\Rightarrow x=1-y$. Nên ta có:

$(1-y)^2=4\Rightarrow (1-y)^2=2^2\Rightarrow 1-y=2$ hoặc $1-y=-2$

Trường hợp 1: $1-y=2\Rightarrow y=1-2=-1\Rightarrow x=1-y=1-(-1)=2$.

Trường hợp 2: $1-y=-2\Rightarrow y=1+2=3\Rightarrow x=1-y=1-3=-2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x,y)\in\{(2;-1);(-2;3)\}$.

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ Chuyên Toán năm 2020-2021)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\left(y+\dfrac{1}{2}+\sqrt{y^2+y+1}\right)=\dfrac{3}{2} \\ x^4+2(3-8y)x^2+16y-7=0 \end{cases}$

Lời giải

$pt(1): x+\sqrt{x^2+3}=-(2y+1)+\sqrt{(2y+1)^2+3}$

$$\Leftrightarrow (x+2y+1)\left[\frac{\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+\sqrt{(2y+1)^2+3}-(2y+1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{(2y+1)^2+3}}\right]=0$$

Do $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+\sqrt{(2y+1)^2+3}-(2y+1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{(2y+1)^2+3}}>0 \Rightarrow x+2y+1=0$

Thế $2y=-1-x$ vào ta có

$pt(2): x^4+8x^3+14x^2-8x-15=0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(x^2+8x+15\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=-3 \\ x=-5 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(1;-1);(-1;0);(-3;1);(-5;2)$

Câu 13. *(Trường chuyên tp Hồ Chí Minh năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

Lời giải

a) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Đặt $a=\sqrt{2x^2+x+9}\geq 0,\ b=\sqrt{2x^2-x+1}\geq 0$.

Ta có: $a^2-b^2=2x+8=2(x+4)$. Từ phương trình đã cho, ta được:

$a^2-b^2=2(a+b)$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)=2(a+b)$

$\Leftrightarrow a-b=2\ \left(\text{do } a=\sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{71}{8}}>0 \text{ nên } a+b>0\right)$.

Như vậy:

$$\sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2x^2-x+1}+2 \Rightarrow 2x^2+x+9=2x^2-x+1+4\sqrt{2x^2-x+1}+4$$

$$\Rightarrow x+2=2\sqrt{2x^2-x+1} \Rightarrow x^2+4x+4=4\left(2x^2-x+1\right)$$

$$\Rightarrow 7x^2-8x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{8}{7} \end{array}\right.$$

Thử lại, ta suy ra phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{0;\dfrac{8}{7}\right\}$.

b) $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 & (1) \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow (x-y)^2=(3x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=3x-1 \\ x-y=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1-2x \\ y=4x-1 \end{array}\right.$

TH1: $y=1-2x$.

Thay $y=1-2x$ vào (2) ta được

$$(1-2x)^2=x^3+8x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow 1-4x+4x^2=x^3+8x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow x^3+4x^2+3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2+4x+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+4x+3=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Do đó trong trường hợp này ta tìm được các nghiệm $(x;y)\in\{(0;1),(-1;3),(-3;7)\}$.

TH2: $y=4x-1$.

Thay $y=4x-1$ vào (2) ta được

$$(4x-1)^2=x^3+8x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow 16x^2-8x+1=x^3+8x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow x^3-8x^2+7x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-8x+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-8x+7=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=7 \end{array}\right.$$

Do đó trong trường hợp này ta tìm được các nghiệm $(x;y)\in\{(0;-1),(1;3),(7;27)\}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)\in\{(0;1),(-1;3),(-3;7),(0;-1),(1;3),(7;27)\}$.

Câu 14. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2020-2021)*

a) Giải bất phương trình $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}<1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2+xy+x-y=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

Lời giải

a) Có $x^2-2y^2+xy+x-y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-1-2y \end{array}\right.$

+) Trường hợp 1: thay $y=x$ vào $x^2+y^2=10$ ta được $2x^2=10 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

+) Trường hợp 2: thay $x=-1-2y$ vào $x^2+y^2=10$ ta được

$(-1-2y)^2+y^2=10 \Leftrightarrow 5y^2+4y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\dfrac{9}{5} \end{array}\right.$

Vậy hệ có 4 nghiệm $(x;y)\in\left\{(\sqrt{5};\sqrt{5}),(-\sqrt{5};-\sqrt{5}),(-3;1),(\dfrac{13}{5};\dfrac{-9}{5})\right\}$.

b) Điều kiện: $-1\le x\le 4$.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}<1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-2\right)+\left(1-\sqrt{4-x}\right)<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}<0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}\right)<0 \Leftrightarrow x<3$

Đối chiếu ĐK tập nghiệm của bất phương trình là: $[-1;3)$

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}=-1$

b) Giải phương trình $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+x=4 \\ x^2+y^2-\dfrac{5}{x^2}=4-2xy \end{cases}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x\ge -1$

Phương trình: $\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}+1=2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 2x+3+1+2\sqrt{2x+3}=4(x+1)$

$\Leftrightarrow 2x+4+2\sqrt{2x+3}=4x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x+3=x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ (x+1)(x-3)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

a) Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2+x+3\ne 0 \\ x^2-5x+3\ne 0 \end{cases}$ (1)

+) Nhận xét: $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

+) Với $x\ne 0$: Khi đó phương trình viết được thành

$$\frac{4}{\frac{x^2+x+3}{x}}+\frac{5}{\frac{x^2-5x+3}{x}}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{x+1+\frac{3}{x}}+\frac{5}{x-5+\frac{3}{x}}=-\frac{3}{2}$$

Đặt $t=x+1+\frac{3}{x}$, thay vào phương trình trên ta được:

$$\frac{4}{t}+\frac{5}{t-6}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4(t-6)+5t}{t(t-6)}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 8t-48+10t=-3t^2+18t \Leftrightarrow 3t^2=48 \Leftrightarrow t=\pm 4.$$

Với $t=4$, ta có: $x+1+\frac{3}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ vô nghiệm do $\Delta=(-3)^2-4.3=-3<0$.

Với $t=-4$, ta có: $x+1+\frac{3}{x}=-4 \Leftrightarrow x^2+5x+3=0$, ta có $\Delta=5^2-4.3=13>0$ suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}; x_2=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

So sánh với điều kiện (1) ta được phương trình có hai nghiệm $x=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}; x=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

c) Điều kiện $x\ne 0$.

$$\begin{cases} x^2+xy+x=4 \\ x^2+y^2-\frac{5}{x^2}=4-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+1)-4=0 \\ x^2+y^2+2xy-\frac{5}{x^2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=\frac{4}{x} \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{4}{x}-1 \\ \left(\frac{4}{x}-1\right)^2-\frac{5}{x^2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{4}{x}-1 \\ \frac{16}{x^2}-\frac{8}{x}+1-\frac{5}{x^2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{4}{x}-1 \\ \frac{11}{x^2}-\frac{8}{x}-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{4}{x}-1 \\ 3x^2+8x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{4}{x}-1 \\ (x-1)(3x+11)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{4}{x}-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{11}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{11}{3} \\ y=\dfrac{52}{33} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;2), \left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{52}{33}\right)$.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Kin Tum năm 2020-2021)*

Giải phương trình $\dfrac{1-\sqrt{x-2019}}{x-2019}+\dfrac{1-\sqrt{y-2020}}{y-2020}+\dfrac{1-\sqrt{z-2021}}{z-2021}+\dfrac{3}{4}=0$ (**)

Lời giải

Điều kiện: $x>2019;\ y>2020;\ z>2021$

Đặt $a=\sqrt{x-2019}; b=\sqrt{y-2020}; c=\sqrt{z-2021}$

(với $a>0,\ b>0,\ c>0$)

Khi đó (**) trở thành $\dfrac{1-a}{a^2}+\dfrac{1-b}{b^2}+\dfrac{1-c}{c^2}+\dfrac{3}{4}=0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c}+\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=b=c=2$$

Suy ra $x = 2023;\ y = 2024;\ z = 2025.$

Câu 17. *(Trường chuyên Lam Sơn 2020-2021)*

1. Giải hệ phương trình $1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12x}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-3y=4x^2+3x+3 \\ y^2+4y+18=7x^2+16x \end{cases}$

Lời giải

1. Điều kiện xác định $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$

- Nếu $x<-1$ thì phương trình vô nghiệm do hai vế trái dấu

- Nếu $x>1$ thì phương trình tương đường với $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}\Leftrightarrow\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2=\left(\frac{35}{12}\right)^2$.

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}\Leftrightarrow\frac{x^4}{x^2-1}+2.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1225}{144}=0.$$

Đặt $t=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}>0$ phương trình trở thành $t^2+2t-\frac{1225}{144}=0\Leftrightarrow(t+1)^2-\left(\frac{37}{12}\right)^2=0\Leftrightarrow t=\frac{25}{12}$ (do $t>0$)

Khi đó $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}\Leftrightarrow 25\sqrt{x^2-1}=12x^2\Leftrightarrow 144x^4-625x^2+625=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{25}{9}\\x^2=\frac{25}{16}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{5}{3}\\x=\pm\frac{5}{4}\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $x>1$ thì có $x=\frac{5}{3}$ và $x=\frac{5}{4}$ là các giá trị thỏa mãn

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{5}{3}$ và $x=\frac{5}{4}$.

2. Nhân phương trình đầu với 2 rồi trừ đi phương trình thứ hai vế với vế ta được

$2xy-y^2-10y-18=x^2-10x+6\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-10x+10y+24=0$

$\Leftrightarrow(x-y-5)^2=1\Leftrightarrow x-y-5=\pm1$.

- Nếu $x-y-5=1\Leftrightarrow y=x-6$, thay vào phương trình đầu ta được

$$x(x-6)-3(x-6)=4x^2+3x+3\Leftrightarrow 3x^2+12x-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\end{array}\right.$$

Với $x=1$ suy ra $y=-5$, nên hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;-5)$.

Với $x=-5$ suy ra $y=-11$, nên hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-5;-11)$.

- Nếu $x-y-5=-1\Leftrightarrow y=x-4$, thay vào phương trình đầu ta được

$$x(x-4)-3(x-4)=4x^2+3x+3\Leftrightarrow 3x^2+10x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-5-2\sqrt{13}}{3}\\x=\frac{-5+2\sqrt{13}}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{-17-2\sqrt{13}}{3}\\x=\frac{-17+2\sqrt{13}}{3}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(x;y)$ là

$$(1;-5),\ (-5;-11),\ \left(\frac{-5-2\sqrt{13}}{3};\frac{-17-2\sqrt{13}}{3}\right),\ \left(\frac{-5+2\sqrt{13}}{3};\frac{-17+2\sqrt{13}}{3}\right).$$

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình: $2x^2-3x\sqrt{5x-4}+5x-4=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}$

Lời giải

a) ĐK: $x \ge \frac{4}{5}$

(1) $\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{5x-4}\right)\left(2x-\sqrt{5x-4}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{5x-4}=0 \\ 2x-\sqrt{5x-4}=0 \end{array}\right.$

$x=\sqrt{5x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases}$

$2x=\sqrt{5x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4x^2=5x-4 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Kết hợp với điều kiện $\Leftrightarrow x=1$ và $x=4$

b) Giải hệ phương trình **:** $\begin{cases} 4x^2y-xy^2=5 \\ 64x^3-y^3=61 \end{cases}$ **(I)**

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $xy\ne 0$ $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} xy(4x-y)=5 \\ (4x-y)(16x^2+4xy+y^2)=61 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y=\dfrac{5}{xy} & (1) \\ (4x-y)\left[(4x-y)^2+12xy\right]=61 & (2) \end{cases}$$

Đặt $t=4x-y$ thay vào (2) ta có:

$$t\left(t^2+\frac{60}{t}\right)=61 \Leftrightarrow t^3-1=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow xy=5$$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy=5 \\ 4x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{5}{4} \\ y=4 \end{cases}$

Câu 19. *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương toán năm 2020-2021)*

1) Giải phương trình: $5x^2+3x+6=(7x+1)\sqrt{x^2+3}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 \\ \sqrt{x^2+12}+\dfrac{5}{2}\sqrt{x+y}=3x+\sqrt{x^2+5} \end{cases}$

Lời giải

1) Giải phương trình: $5x^2+3x+6=(7x+1)\sqrt{x^2+3}$

$\Leftrightarrow 5x^2+3x+6-(7x+1)\sqrt{x^2+3}=0$

$\Leftrightarrow 2(x^2+3)-(x+1)\sqrt{x^2+3}+3x^2+3x-6x\sqrt{x^2+3}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}(2\sqrt{x^2+3}-x-1)-3x(2\sqrt{x^2+3}-x-1)=0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{x^2+3}-x-1)(\sqrt{x^2+3}-3x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3}=x+1$ hoặc $\sqrt{x^2+3}=3x$

<u>**TH1**</u>: $2\sqrt{x^2+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 4x^2+12=x^2+2x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 3x^2-2x+11=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm)

<u>**TH2**</u>:

$$\sqrt{x^2+3}=3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+3=9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ x=-\dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

b) **Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 & (1) \\ \sqrt{x^2+12}+\dfrac{5}{2}\sqrt{x+y}=3x+\sqrt{x^2+5} & (2) \end{cases}$

ĐK: $x+y>0$

$(1) \Leftrightarrow (x+y).\left[(x+y)^2-2xy\right]+8xy=16(x+y)$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2-16\right]-2xy.(x+y-4)=0$

$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[x^2+y^2+4(x+y)\right]=0 \Leftrightarrow x+y-4=0$

(vì $x+y>0$ nên $x^2+y^2+4(x+y)>0$)

Thay $x+y=4$ vào phương trình (2) ta được :

$\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5$ (*)

Nhận xét: VT>0 $\Rightarrow VP>0 \Rightarrow x>\dfrac{5}{3}$,

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2\,(TM) \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0\ (**) \end{array}\right.$$

Vì $x>\dfrac{5}{3}\ \Rightarrow x+2>0$,

$$\sqrt{x^2+12}+4>\sqrt{x^2+5}+3 \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}<\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0,\ \forall x>\frac{5}{3}$$

$\Rightarrow$ (**) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;\ 2)$

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi năm 2020-2021)*

Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=4.$

Lời giải

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{3}$

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=4 \Leftrightarrow 3x+1+x+3+2\sqrt{(3x+1)(x+3)}=16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+3)}=6-2x$$

$$\Rightarrow (3x+1)(x+3)=(6-2x)^2$$

$$\Rightarrow x^2-34x+33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=33 \end{array}\right.$$

Thử lại, chọn $x=1$.

Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2020-2021)*

1. Giải phương trình $x^4-2x^2-3=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x+1}=2y+\sqrt{2y}-1 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$.

Lời giải

1. Giải phương trình $x^4-2x^2-3=0$ (1).

Đặt $t=x^2$, điều kiện $t\ge 0$

(1) trở thành $t^2-2t-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ x=-1\ (l) \end{array}\right.$$

Với $t=3 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x+1}=2y+\sqrt{2y}-1 & (1) \\ x^2+y^2=34 & (2) \end{cases}$.

Điều kiện: $x \ge -1;\ y \ge 0$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{2y}=2y-x-1$

$\Leftrightarrow x+1-2y=(2y-x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2y}\right)$

$\Leftrightarrow (x-2y+1)\left(1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2y}\right)=0 \Leftrightarrow x=2y-1$

Thay vào (2) ta được $(2y-1)^2+y^2=34 \Leftrightarrow 5y^2-4y-33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\dfrac{-11}{5} \end{array}\right.$

So với điều kiện ta được $y=3$, suy ra $x=5$.

Hệ có nghiệm $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$.

Câu 22. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-6y^2-xy+2x-y+1=0 \\ 2x^3-7y=9 \end{cases}$

Lời giải

$x^2-6y^2-xy+2x-y+1=0 \Leftrightarrow x^2+(2-y)x-6y^2-y+1=0 \quad (I)$

Xem (I) là phương trình bậc hai theo x, ta có

$$\Delta=(2-y)^2-4\left(-6y^2-y+1\right)=25y^2$$

Vì vậy phương trình (I) có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-(2-y)+\sqrt{25y^2}}{2} \\ x=\dfrac{-(2-y)-\sqrt{25y^2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3y-1 \\ x=-2y-1 \end{array}\right..$$

Trường hợp 1: $x=3y-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được:

$2(3y-1)^3-7y=9 \Leftrightarrow 2\left(27y^3-27y^2+9y-1\right)-7y-9=0$

$\Leftrightarrow 2.27y^2(y-1)+11(y-1)=0 \Leftrightarrow (y-1)\left(54y^2+11\right)=0 \Leftrightarrow y=1$.

Trường hợp 2: $x=-2y-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được:

$2(-2y-1)^3-7y=9 \Leftrightarrow -2\left(8y^3+12y^2+6y+1\right)-7y-9=0$

$\Leftrightarrow 16y^3+24y^2+19y+11=0 \Leftrightarrow 16y^3+16+24y^2-24+19y+19=0$

$\Leftrightarrow 16(y+1)\left(y^2-y+1\right)+24(y+1)(y-1)+19(y+1)=0$

$\Leftrightarrow (y+1)\left(16y^2-16y+16+24y-24+19\right)=0$

$\Leftrightarrow (y+1)\left(16y^2+8y+11\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ 16y^2+8y+11=0\,(vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow y=-1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(2;1),(1;-1)$

Câu 23. *(Trường chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3}=x+\sqrt{2x-1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+2=xy \\ (2-x)y=x^2+y^2 \end{cases}$.

Lời giải

a) Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$. Khi đó $PT\Leftrightarrow x^2+3=x^2+2x\sqrt{2x-1}+2x-1\Leftrightarrow 2x\sqrt{2x-1}+2x-4=0$

Đặt $t=\sqrt{2x-1},t\ge0$, ta có phương trình $t^2-3+(t^2+1)t=0\Leftrightarrow(t-1)(t^2+2t+3)=0\Leftrightarrow t=1$.

Ta được $\sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow 2x-1=1\Leftrightarrow x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

b) $\begin{cases} x-y+2=xy & (1) \\ (2-x)y=x^2+y^2 & (2) \end{cases}$

$(1)+(2)\Rightarrow(x+y)^2-(x+y)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x+y=2 \end{array}\right.$

TH1: $x+y=-1\Leftrightarrow y=-1-x$, thay vào phương trình (1) ta được $x^2+3x+3=0$ (vô nghiệm)

TH2: $x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$, thay vào phương trình (1) ta được $x=0\Rightarrow y=-1$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm là $(0;-1)$.

Câu 24. *(Trường chuyên Yên Bái năm 2020-2021)*

1. Giải phương trình $\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x+10}}+2=\sqrt{x^2+x+4}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-4x+2y=0 \\ (2x-y^2)^2+4-2y=0 \end{cases}$.

Lời giải

1. Giải phương trình $\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x+10}}+2=\sqrt{x^2+x+4}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2+x+10>0 \\ x^2+x+4\ge0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{39}{4}>0 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0 \end{cases}$ thỏa mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+4}$,Điều kiện $t>0$. Phương trình trở thành $\frac{t^2-4}{\sqrt{t^2+6}}+2=t$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-2)(t+2)}{\sqrt{t^2+6}}-(t-2)=0 \Leftrightarrow (t-2)\left(\frac{t+2}{\sqrt{t^2+6}}-1\right)=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ \sqrt{t^2+6}=t+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

* Với $t=2$ ta có $\sqrt{x^2+x+4}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

* Với $t=\frac{1}{2}$ ta có $\sqrt{x^2+x+4}=\frac{1}{2}$. Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x=-1$ và $x=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-4x+2y=0 & (1) \\ \left(2x-y^2\right)^2+4-2y=0 & (2) \end{cases}$.

Cộng vế của hai phương trình (1) và (2) ta được

$$\left(2x-y^2\right)^2+x^2-4x+4=0$$

$$\left(2x-y^2\right)^2+(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y^2=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y^2=4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$. Thử lại ta thấy $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2,2)$.

Câu 25. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2020-2021)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2+4y^2+8=x(x+2) \\ x+y+3=3\sqrt{2y-1} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $2y-1\ge 0 \Leftrightarrow y\ge \frac{1}{2}$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x+4)(y^2-x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=y^2+2 \end{array}\right.$

Thế $x=-4$ vào phương trình thứ 2 ta được

$$y-1=3\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ (y-1)^2=9(2y-1) \end{cases} \Leftrightarrow y=10+3\sqrt{10}$$

Với $x=y^2+2$, thay vào (2) ta được: $y^2+y+5=3\sqrt{2y-1}$ (3)

Ap dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$y^2+y+5=(y^2-y+1)+(2y-1)+5>(2y-1)+5\geq 2\sqrt{5(2y-1)}\geq 3\sqrt{2y-1}$

Do đó phương trình (3) vô nghiệm

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình: $2x+2\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=25$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(y^2-2y)=-1\\ x-y^2+y=2\end{cases}$

Lời giải

a) ĐK: $x\geq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x(x+5)}+\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=25$ (1)

Đặt $t=\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$ $(t\geq 0)\Rightarrow 2x+2\sqrt{x(x+5)}=t^2-5$

$(1)\Rightarrow t^2-5+t=25\Leftrightarrow t^2+t-30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5(TM)\\ t=-6(KTM)\end{array}\right.$

Với $t=5\Rightarrow\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$ $(0\leq x\leq 25)$

Giải phương trình ta được $x=4$ (TM)

b) $xy^2+y^2-x^2+xy-2x+y=0\Leftrightarrow(x+1)y^2+y(x+1)-(x+1)^2=-1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1=1\\ y^2+y-x-1=-1\end{cases}(I)\\ \begin{cases}x+1=-1\\ y^2+y-x-1=1\end{cases}(II)\end{array}\right.$

Giải (I) được các nghiệm $(0;0);(0;-1)$

Giải (II) được các nghiệm $(-2;0);(-2;-1)$

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2020-2021)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{y+3}=1\\ 4\sqrt{x-1}-\dfrac{3}{y+3}=7\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 1\\ y\neq -3\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x-1}\\ v=\dfrac{1}{y+3}\end{cases}$ (điều kiện $u\geq 0$) $\Rightarrow\begin{cases}2u+v=1\\ 4u-3v=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\ v=-1\end{cases}$ (thỏa mãn)

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \dfrac{1}{y+3}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy HPT có 1 nghiệm $(2;-4)$

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2020-2021)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+xy+y=11 \end{cases}$

b) Giải phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2$.

Lời giải

a) Đặt $S=x+y$, $P=xy$ ta được $\begin{cases} S^2-2P=13 \\ S+P=11 \end{cases}$

$\Rightarrow S^2+2S-35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=-7 \Rightarrow P=18 \\ S=5 \Rightarrow P=6 \end{array}\right.$

Với $S=-7, P=18 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-7 \\ xy=18 \end{cases}$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình $X^2+7X+18=0$ (vô nghiệm)

Với $S=5, P=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=3 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm $S=\{(2;3);(3;2)\}$.

b) Điều kiện $-2 \le x \le 2$

$\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}=2-\sqrt{4-x^2}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)^2=\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^2 \Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}=4-4\sqrt{4-x^2}+4-x^2$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{4-x^2}=4-x^2$

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}, (t \ge 0)$

Phương trình trở thành $6t=t^2 \Leftrightarrow t(t-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \quad (n) \\ t=6 \quad (n) \end{array}\right.$

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Với $t=6 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=6 \Leftrightarrow x^2=-32$ (vô nghiệm)

Thử lại ta nhận nghiệm $x=2; x=-2$

Vậy tập nghiệm $S=\{-2;2\}$.

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x+y)\left(16-x^2y^2-4xy\right)=2y^5 \end{cases}$.

Lời giải

a) ĐK: $x>-5$. Đặt $u=\sqrt{2x^2+5x+12}, v=\sqrt{2x^2+3x+2}$ $(u>0, v>0)$.

$\Rightarrow u^2-v^2=2x+10=2(x+5)=2(u+v)$

$\Leftrightarrow (u+v)(u-v-2)=0 \Leftrightarrow u-v-2=0$ (vì $u>0, v>0$).

Do đó $\sqrt{2x^2+5x+12}=\sqrt{2x^2+3x+2}+2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+3x+2}=x+3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ \left(2\sqrt{2x^2+3x+2}\right)^2=(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ 7x^2+6x-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{7} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1, x=\dfrac{1}{7}$.

b) Ta có $\begin{cases} x^2+y^2=4 & (1) \\ (x+y)\left(16-x^2y^2-4xy\right)=2y^5 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được: $(x+y)\left[\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2-\left(x^2+y^2\right)xy\right]=2y^5$

$\Leftrightarrow x^5+y^5=2y^5 \Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào (1) ta được $\begin{cases} x=y \\ 2x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình $(x+1)\sqrt{-x^2+2x+6}=3+2x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2xy^2 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}$.

Lời giải

a) Đặt $a=x+1; b=\sqrt{-x^2+2x+6};\ b\ge 0$

Ta được $\begin{cases} ab=3+2x \\ a^2+b^2=4x+7 \end{cases} \Rightarrow (a-b)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=a-1 \\ b=a+1 \end{array}\right.$

Nếu $b=a-1$, thay vào ta được: $\sqrt{-x^2+2x+6}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

Nếu $b=a+1$ thay vào ta được: $\sqrt{-x^2+2x+6}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x\in\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

b) Với điều kiện $x,y\ne 0$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x^2+y^2=2xy^2 \\ xy+3y^2=2xy^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2-xy-2y^2=0$

$\Rightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=2y \end{array}\right.$

Nếu $x=-y \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ x^2+x^2=2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ do $x,y\ne 0$.

Nếu $x=2y \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 4y^2+y^2=4y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{5}{4} \end{cases}$ do $x,y\ne 0$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)\in\left\{(1;-1),\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{4}\right)\right\}$

Câu 31. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình $2x\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3=3x^2+x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+x^2+y^2-x^2y-xy-y=0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-3x-4} \end{cases}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ne 0$

Ta có $2x\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3=3x^2+x \Leftrightarrow 2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{3}{x}=3x+1$

$$\Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right]=0$$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-1$ hoặc $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

TH1: $x+\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ (vô nghiệm)

TH2: $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$ (tm). Vậy $S=\left\{\frac{1}{2};2\right\}$

$b)\begin{cases} x^3+x^2+y^2-x^2y-xy-y=0 & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-3x-4} & (2) \end{cases}$, ĐKXĐ: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 1 \\ 2y-3x-4\ge 0 \end{cases}$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow \left(x^2-y\right)\left(x-y+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=x^2 \end{array}\right.$$

TH1: $y=x+1$ kết hợp với ĐK $x\ge 0$ ta có $2y-3x-4=-x-2<0$ (loại)

TH2: $y=x^2$ thay vào phương trình (2) ta được

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2-3x-4} \Leftrightarrow 2\sqrt{x\left(x^2-1\right)}=x^2-4x-3$$

$$2\sqrt{\left(x^2-x\right)\left(x+1\right)}=\left(x^2-x\right)-3\left(x+1\right)$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2-x} \\ b=\sqrt{x+1} \end{cases}$ $\left(a\ge 0, b\ge 1\right)$, ta có $2ab=a^2-3b^2 \Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a-3b\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0\ \ (ktm) \\ a-3b=0 \end{array}\right.$$

Với $a-3b=0$, ta có $\sqrt{x^2-x}=3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2-10x-9=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5+\sqrt{34} \Rightarrow y=59+10\sqrt{34} \\ x=5-\sqrt{34}\ \ (ktm) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;\ y\right)=\left(5+\sqrt{34};\ 59+10\sqrt{34}\right)$

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An đề dự bị năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình $3\left(x^3+\frac{1}{x}\right)=7x^2+4x+7$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2-5x-y+6=0 \\ \sqrt{x-\sqrt{y}-2}+2y=2x-5 \end{cases}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\neq 0$

Ta có $3\left(x^3+\frac{1}{x}\right)=7x^2+4x+7$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=7x+4+\frac{7}{x}\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6=7\left(x+\frac{1}{x}\right)+4$

$\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right]=0$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-1$ hoặc $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$

TH1: $x+\frac{1}{x}=-1\Leftrightarrow x^2+x+1=0$ (vô nghiệm)

TH2: $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=3 \end{array}\right.$ (t/M) Vậy $S=\left\{\frac{1}{3};3\right\}$

$b)\begin{cases} x^2-y^2-5x-y+6=0 & (1) \\ \sqrt{x-\sqrt{y}-2}+2y=2x-5 & (2) \end{cases}$ ĐK: $\begin{cases} x-\sqrt{y}-2\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow (x-y-3)(x+y-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+3 \\ x+y-2=0 \end{array}\right.$

TH1: $x=y+3$ thay vào phương trình (2) ta được $\sqrt{y-\sqrt{y}+1}=1\Leftrightarrow y-\sqrt{y}+1=1$ (Thỏa mãn)

$\Leftrightarrow y-\sqrt{y}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\Rightarrow x=3 \\ y=1\Rightarrow x=4 \end{array}\right.$

TH2: $x+y-2=0$, từ (2) suy ra $2x-5\ge 0 \Rightarrow x\ge \frac{5}{2}$

$\Rightarrow x+y-2>0$ (loại)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(3;0),(4;1)\}$

Câu 33. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2020-2021)*

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2=2y+3 \\ y^2=2x+3 \end{cases}$.

2. Giải phương trình $x^2+3-(x+3)\sqrt{x^2+3}+2(x+1)=0$.

Lời giải

1) Hệ $\Rightarrow x^2-y^2=2(y-x)\Leftrightarrow (x-y)(x+y+2)=0$

TH $x=y$. Ta được $x^2=2x+3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Hệ có nghiệm $(-1;-1);(3;3)$

TH $y=-x-2$. Ta được $x^2=2(-x-2)+3\Leftrightarrow x=-1$

Hệ có nghiệm $(-1;-1)$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(-1;-1);(3;3)$

2) Đặt $t=\sqrt{x^2+3}\ (t\ge 0)$. Ta được $t^2-(x+3)t+2x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x+1 \end{array}\right.$

$t=2\Rightarrow \sqrt{x^2+3}=2\Leftrightarrow x=\pm 1$ (thỏa mãn)

$t=x+1\Rightarrow \sqrt{x^2+3}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=1 \end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=\pm 1$.

Câu 34. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình năm 2020-2021)*

Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}\Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0 \end{array}\right.$$

Từ phương trình đã cho ta có: $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5>0\Rightarrow x>\frac{5}{3}$

Dễ dàng chứng minh được : $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0,\ \forall x>\frac{5}{3}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2020-2021)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+y}=y^2+y-x\\ \sqrt{y-1}=\sqrt{x+3y+1}-4\end{cases}$

Lời giải

ĐK: $y\ge 1; x+y\ge 0; x+3y\ge -1$

$2\sqrt{x+y}=y^2+y-x\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+y}+1\right)^2=\left(y+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=y\\ \sqrt{x+y}=-y-2\end{array}\right.$

$\sqrt{x+y}=-y-2$ (loại do $y\ge 1$)

$\sqrt{x+y}=y\Leftrightarrow x=y^2-y$ (t/m đk) thay vào phương trình $\sqrt{y-1}=\sqrt{x+3y+1}-4$ được

$\sqrt{y-1}=y-3$ (đk: $y\ge 3$)

Biến đổi phương trình thành $y^2-7y+10=0$.

Giải phương trình đươc $y_1=2$ (loại do đk $y\ge 3$), $y_2=5$ (t/m đk)

Với $y=5\Rightarrow x=20$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases}x=20\\ y=5\end{cases}$

Câu 36. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\ \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2}\end{cases}$.

Lời giải

Ta có: Ta có:

$$\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\ \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\ \frac{5}{xy}=\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2=9\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-3\\ xy=2\end{cases}\end{array}\right.$$

TH1: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ suy ra $x,\ y$ là nghiệm của phương trình $X^2-3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=1 \\ X=2 \end{array}\right.$

Ta có hai nghiệm $(1,\ 2);\ (2,\ 1)$.

TH2: $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$ suy ra $x,\ y$ là nghiệm của phương trình $X^2+3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-1 \\ X=-2 \end{array}\right.$

Ta có hai nghiệm $(-1,-2);\ (-2,-1)$.

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(1,\ 2);\ (2,\ 1);\ (-1,-2);\ (-2,-1)$.

Câu 37. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Giải phương trình $\sqrt{16x^2-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}=2$.

Lời giải

ĐK : $x \ge \dfrac{1}{4}$.

Ta có:

$$\sqrt{16x^2-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}=2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(4x+1)(4x-1)}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}-2=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1}\left(\sqrt{4x-1}-2\right)+\sqrt{4x-1}-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+1}+1\right)\left(\sqrt{4x-1}-2\right)=0\ (*)$$

Do $\sqrt{4x+1}+1>0$ với mọi $x \ge \dfrac{1}{4}$ nên từ (*) suy ra

$\sqrt{4x-1}-2=0 \Leftrightarrow 4x-1=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}\ (TM)$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{5}{4}$.

Câu 38. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2\sqrt{x}=4 \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}=x \end{cases}$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2\sqrt{x}=4 & (1) \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} & (2) \end{cases}$

Dễ thấy $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$. Từ phương trình (2), ta có: $2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}$ (3)

Đặt $\begin{cases} u = 2y > 0 \\ v = \dfrac{1}{x} > 0 \end{cases}$. Từ (3), ta có

$u + u\sqrt{u^2+1} = v + v\sqrt{v^2+1} \Leftrightarrow u + \sqrt{u^4+u^2} = v + \sqrt{v^4+v^2}$

$\Leftrightarrow (u-v)\left[1 + \dfrac{(u+v)(u^2+v^2+1)}{\sqrt{u^4+u^2}+\sqrt{v^4+v^2}}\right] = 0 \Leftrightarrow u = v.$

Với $u = v,$ ta có $2xy = 1.$

Thay $2xy = 1$ vào phương trình (1), ta có: $x^3 + x + 2\sqrt{x} - 4 = 0$ (4)

Đặt $t = \sqrt{x} > 0.$ Từ (4), ta có $t^6 + t^2 + 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^5+t^4+t^3+2t+4\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (do $t^5+t^4+t^3+2t+4 > 0$)

Với $t = 1,$ ta có $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}.$ Vậy $\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Chuyên đề 4
Phương trình bậc 2 và hệ thức vi-et

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2020-2021)*

Cho các số a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh có ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm $x^2+ax+1=0; x^2+bx+1=0; x^2+cx+1=0$.

Lời giải

Cho các số a,b,c thảo mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh có ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm $x^2+ax+1=0; x^2+bx+1=0; x^2+cx+1=0$.

Ta có: với $\forall a,b,c$: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)\le 3(a^2+b^2+c^2)$ suy ra

$(a+b+c)^2<3(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c)^2}{3}\le a^2+b^2+c^2$.

Nên $a^2+b^2+c^2\ge \dfrac{6^2}{3}=12$. $(*)$.

Giả sử ba phương trình trên đều vô nghiệm, suy ra:

$\begin{cases}\Delta_1=a^2-4<0\\ \Delta_2=b^2-4<0\\ \Delta_3=c^2-4<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a^2<4\\ b^2<4\\ c^2<4\end{cases}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2<12$. Mâu thuẫn với $(*)$. Vậy có ít nhất một trong ba phương trình trên có nghiệm.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bình Dương vòng 2 năm 2020-2021)*

Cho hai số thực m,n khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng phương trình $(x^2+mx+n)(x^2+nx+m)=0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Ta có

$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2(m+n)=mn$

Ta có $(x^2+mx+n)(x^2+nx+m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+mx+n=0\\ x^2+nx+m=0\end{array}\right.$.

Ta có $\Delta_1=m^2-4n, \Delta_2=n^2-4m$.

Khi đó $\Delta_1+\Delta_2=m^2+n^2-4(m+n)=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2\ge 0, \forall m,n$.

Trong 2 biểu thức trên Δ_1 và Δ_2 tồn tại ít nhất 1 Δ không âm. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Cà Mau năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^2-2(m+4)x+m^2-8=0$ (m là tham số)

a) giải phương trình khi $m=1$.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 và $A=x_1+x_2-3x_1x_2$ đạt $GTLN$. Tìm $GTLN$ đó.

Lời giải

a) giải phương trình khi $m=1$.

Với $m=1$ ta có:

$$x^2-2(1+4)x+(-1)^2-8=0 \Leftrightarrow x^2-10x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5-4\sqrt{2} \\ x=5+4\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x=5-4\sqrt{2} \\ x=5+4\sqrt{2} \end{array}\right.$

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 và $A=x_1+x_2-3x_1x_2$ đạt $GTLN$. Tìm $GTLN$ đó.

Để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=(m+4)^2-m^2+8=8m+24\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -3$

Áp dụng Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=2(m+4) \\ x_1x_2=m^2-8 \end{cases}$$

Ta có:

$$A=x_1+x_2-3x_1x_2$$

$$A=2(m+4)-3(m^2-8)$$

$$A=-3m^2+2m+32$$

$$A=-3\left(m-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{97}{3}$$

Vì $\left(m-\frac{1}{3}\right)^2\ge 0 \Rightarrow -3\left(m-\frac{1}{3}\right)^2\le 0 \Rightarrow A\le \frac{97}{3}$

Vậy A đạt $GTLN=\frac{97}{3} \Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Nông chuyên toán năm 2020-2021)*

Cho phương trình bậc hai: $x^2-2(m-1)x+2m-4=0$ (*) với m là tham số. Chứng tỏ rằng phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ với mọi giá trị của m. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x_1^2+x_2^2$.

Lời giải

Cho phương trình bậc hai: $x^2-2(m-1)x+2m-4=0$ (*) với m là tham số. Chứng tỏ rằng phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ với mọi giá trị của m. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x_1^2+x_2^2$.

Phương trình (*) là phương trình bậc hai có:

$\Delta' = (m-1)^2 + (2m-4) = m^2 - 4m + 5 = (m-2)^2 + 1 > 0, \forall m$

Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng định lý Vi-et ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = 2m-4 \end{cases}$.

$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= (2(m-1))^2 - 2(2m-4) = 4m^2 - 12m + 12 = (2m+3)^2 + 3$.

Vì $(2m+3)^2 \geq 0, \forall m$.

$\Leftrightarrow (2m+3)^2 + 3 \geq 3, \forall m \Leftrightarrow A \geq 3, \forall m$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $(2m+3)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 3$ khi và chỉ khi $m = \frac{-3}{2}$.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các cặp số thực (m,n) sao cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1-x_1)(1-x_2) = -2$, đồng thời phương trình $2x^2 + nx + m = 0$ có hai nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn $(2-x_3)(2-x_4) = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình : $x^2 + mx + n = 0$

Vì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 nên theo hệ thức vi- ét, ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -m \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = n \end{cases}$

Ta có : $(1-x_1)(1-x_2) = -2$

$\Leftrightarrow 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 = -2$

$\Leftrightarrow 1 + m + n = -2$

$\Leftrightarrow m + n = -3$ (1)

Xét phương trình $2x^2 + nx + m = 0$

Vì phương trình có hai nghiệm x_3, x_4 nên theo hệ thức vi- ét, ta có:

$\begin{cases} x_3 + x_4 = \frac{-b}{a} = -\frac{n}{2} \\ x_3x_4 = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \end{cases}$

Ta có : $(2-x_3)(2-x_4) = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 4 - 2(x_3 + x_4) + x_3x_4 = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 4+n+\frac{m}{2}=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow n+\frac{m}{2}=-\frac{5}{2}(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

$\begin{cases} m+n=-3 \\ n+\frac{m}{2}=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-2 \end{cases}$

Vậy : $(m,n)=(-1;-2)$.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^2+mx+n=0$ trong đó x là ẩn số, m,n là tham số thỏa mãn $m+n=4$ .Tìm các giá trị của m,n để phương trình có hai nghiệm phan biệt x_1,x_2 sao cho $x_1=x_2+x_2^2$

Lời giải

Ta có : $\Delta=m^2-4n$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m^2-4n>0(*)$

Áp dụng định lí Viet $\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-m(1) \\ x_1.x_2=n(2) \end{cases}$

Theo giả thiết $x_1=x_2+x_2^2 \Leftrightarrow x_1=x_2-mx_2-n \Leftrightarrow x_1=x_2(1-m)-n$

Thay vào (1) ta có : $x_2(1-m+m)-n=-m \Leftrightarrow x_2(2-m)=n-m$

Mà $m+n=4 \Rightarrow x_2(2-m)=4-2m \Leftrightarrow (2-m)(x_2-2)=0$

Nếu $m=2 \Rightarrow n=2 \Rightarrow m^2-4n<0(L)$

$\Rightarrow x_2=2 \Rightarrow 2^2+2.m+n=0 \Leftrightarrow 2m+n=-4$

$\begin{cases} m+n=4 \\ 2m+n=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=12 \\ m=-8 \end{cases}$

Thử lại ta có ptr: $x^2-8x+12=0$ có hai nghiệm $x_1=6,x_2=2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Hậu Giang năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+2=0$ (1) (với m là tham số thực).

a) Giải phương trình (1) khi $m=3$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $1<x_1<x_2$.

Lời giải

a) Khi $m=3$, phương trình (1) trở thành $x^2-7x+11=0$.

Ta có $\Delta=49-4.1.11=5>0$.

Nghiệm của phương trình là $x=\frac{7+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$.

b) Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4.1.(m^2+2)=4m-7$.

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ phân biệt khi và chỉ khi $\Delta>0\Leftrightarrow m>\frac{7}{4}$ (*)

Với điều kiện (*), theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m+1\\x_1x_2=m^2+2\end{cases}$.

Khi đó $1<x_1<x_2\Leftrightarrow 0<x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-1+x_2-1>0\\(x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2-2>0\\x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1-2>0\\m^2+2-2m-1+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\m^2-2m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

So với điều kiện (*), ta nhận: $m>\frac{7}{4}$.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^4-2mx^2+m^2-2m+2=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=24$.

Lời giải

Đặt $x^2=t$. Phương trình trở thành $t^2-2mt+m^2-2m+2=0$ (*)

Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1;t_2$ dương

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=2m-2>0\\t_1+t_2=2m>0\\t_1t_2=m^2-2m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow m>1$

$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=24\Leftrightarrow 2\left(t_1^2+t_2^2\right)=24$

$\Leftrightarrow\left(t_1+t_2\right)^2-2t_1t_2=12\Leftrightarrow m^2+2m-8=0$

Giải phương trình được $m_1=-4$ (loại), $m_2=2$ (t/m đk).

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình năm 2020-2021)*

Cho phương trình: $x^2-(m-1)x-m^2+m-2=0\ \ (1)$ (*với m là tham số*).

Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1), tìm m để $Q=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Xét $ac=-m^2+m-2=-(m^2-m+2)=-\left[(m-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\right]<0,\forall m$

$\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Rightarrow$ Q xác định và $Q<0\ \forall m$

Ta có: $|Q|=\left|\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3\right|=\left|\frac{x_1}{x_2}\right|^3+\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^3$ (Do $\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_1}$ cùng dấu)

Suy ra $|Q|\geq 2$ (theo Cô si)

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}Q\geq 2\\ Q\leq -2\end{array}\right.\Rightarrow Q\leq -2 \text{ (do } Q<0\text{)}$$

$$Q=-2\Leftrightarrow\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3=-2\Leftrightarrow\left(x_1^3+x_2^3\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2=0\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$$

Vậy $m=1$ thì $Q=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình đề chung năm 2020-2021)*

Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$ (2) (*với* m *là tham số*).

a) Giải phương trình (2) với $m=1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (2) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn:

$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2>5$.

Lời giải

a) Với $m=1$ ta có phương trình $x^2-4x-2=0\ (3)$

Vì $\Delta'=6>0$ nên phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt

$x_1=2+\sqrt{6};\ x_2=2-\sqrt{6}$

b) Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow 2m+4\geq 0\Leftrightarrow m\geq -2\cdot$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m+2\\ x_1.x_2=m^2-3\end{cases}$

Khi đó: $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2>5\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-5>0$

$$\Leftrightarrow(2m+2)^2-4(m^2-3)-5>0$$

$$\Leftrightarrow 8m+11>0\Leftrightarrow m>-\frac{11}{8}$$ (thỏa mãn)

Vậy với $m > -\dfrac{11}{8}$ thì phương trình (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 > 5$

Câu 11. *(Trường chuyên Long An chuyên năm 2020-2021)*

Cho phương trình: $m\left(m^2x - m - 2\right) = 8x + 4$ với m là tham số, $m \neq 2$.

Tìm tất cả giá trị của m để phương trình trên có nghiệm nhỏ hơn -2.

Lời giải

$m\left(m^2x - m - 2\right) = 8x + 4 \Leftrightarrow \left(m^3 - 8\right)x = m^2 + 2m + 4 \Leftrightarrow \left(m - 2\right)x = 1$

(vì $m^2 + 2m + 4 = \left(m + 1\right)^2 + 3 > 0$)

Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{m-2}$

$x = \dfrac{1}{m-2} < -2 \Leftrightarrow \dfrac{2m-3}{m-2} < 0$

Kết luận $\dfrac{3}{2} < m < 2$

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2020-2021)*

Cho phương trình ẩn x là $x^2 - px + q = 0$ $\left(1\right)$ (với $p; q$ là các số nguyên tố). Tìm tất cả các giá trị của p và q biết phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm là các số nguyên dương.

Lời giải

Điều kiện để phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm là $\Delta = p^2 - 4q \geq 0$ $\left(*\right)$

Áp dụng định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1x_2 = q \end{cases}$ với $x_1; x_2 \in \mathbb{Z}^+$.

Vì q là số nguyên tố nên $x_1 = 1$ hoặc $x_2 = 1$

Nếu $x_1 = 1$ thì $1 + x_2 = p$ và x_2 là các số nguyên tố liên tiếp, suy ra x_2 là số nguyên tố chẵn nên $x_2 = q = 2; p = 3$. Tương tự, nếu $x_2 = 1$ thì $x_1 = q = 2; p = 3$

Ta thấy $q = 2; p = 3$ thỏa mãn điều kiện $\left(*\right)$ là các giá trị cần tìm.

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^2 - 2\left(m - 1\right)x + 2m - 4 = 0$, (với m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm giá trị của tham số m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Lời giải

Ta có $x_1 + x_2 = 2\left(m - 1\right), x_1x_2 = 2m - 4$

$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 3$

Suy ra $4\left(m - 1\right)^2 - 2\left(2m - 4\right) = 3 \Leftrightarrow \left(2m - 3\right)^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $m=\frac{3}{2}$ thì $x_1^2+x_2^2=3$.

Câu 14. *(Trường chuyên toán Vĩnh Long năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^2-2x-2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị các biểu thức:

a) ${x_1}^3x_2+x_1{x_2}^3$ b) $\frac{x_1}{x_1^2+2x_2}+\frac{x_2}{x_2^2+2x_1}$.

Lời giải

Áp dụng Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=-2 \end{cases}$

Ta có ${x_1}^3x_2+x_1{x_2}^3=x_1x_2\left({x_1}^2+{x_2}^2\right)=x_1x_2\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]=-2.\left[2^2-2.(-2)\right]=-16$

b) Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình nên $\begin{cases} x_1^2=2x_1+2 \\ x_2^2=2x_2+2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+2x_2}+\frac{x_2}{x_2^2+2x_1}=\frac{x_1}{2x_1+2+2x_2}+\frac{x_2}{2x_2+2+2x_1}=\frac{x_1+x_2}{2\left(x_1+x_2\right)+2}=\frac{2}{2.2+2}=\frac{1}{3}.$$

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2020-2021)*

Cho phương trình: $x^2-5mx-4m=0$ (với m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm đó.

b) Chứng minh rằng khi phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì:

$${x_1}^2+5mx_2+m^2+14m+1>0.$$

Lời giải

Phương trình: $x^2-5mx-4m=0$.

a) Tìm m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm đó.

Ta có: $\Delta=25m^2+16m$

Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta=0\Leftrightarrow 25m^2+16m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\frac{16}{25} \end{array}\right.$

+) $m=0$ nghiệm kép là $x_1=x_2=\frac{5m}{2}=0$

+) $m=-\frac{16}{25}$ nghiệm kép là $x_1=x_2=\frac{5m}{2}=-\frac{8}{5}$

b) Chứng minh rằng khi phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 thì ${x_1}^2+5mx_2+m^2+14m+1>0$.

PT có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 thì $\Delta=25m^2+16m>0$

và ${x_1}^2-5mx_1-4m=0\Leftrightarrow {x_1}^2=5mx_1+4m$ và $x_1+x_2=5m$

Xét $P = x_1^2 + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1 = 5mx_1 + 4m + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1$

$= 5m(x_1 + x_2) + m^2 + 18m + 1 = 26m^2 + 18m + 1$

Suy ra $P = 25m^2 + 16m + m^2 + 2m + 1 = \Delta + (m+1)^2 > 0$ (vì $\Delta > 0$). Đpcm.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

Cho phương trình: $x^2 + mx + m - 1 = 0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 - 4(x_1 + x_2) = 5$

Lời giải

$\Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \ge 0 \forall m$

Nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - 4(x_1 + x_2) = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) = 5(*)$

Theo hệ thức vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1.x_2 = m - 1 \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow (-m)^2 - 2(m-1) - 4(-m) = 5 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$

Giải phương trình ta được $m_1 = 1; m_2 = -3$

Câu 17. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m + 6 = 0.$ Tìm giá trị của m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_4 - 2x_3 + 2x_2 - x_1 = 0.$

Lời giải

Phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m + 6 = 0.$ (1)

Đặt $t = x^2 \left(t \ge 0\right)$, ta có : $t^2 - 2mt + 2m + 6 = 0$ (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt ⇔ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$t_1, t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 2m + 6 > 0 \\ S = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 6 > 0 \\ m > 0 \end{cases}$ (3)

Với điều kiện (3), phương trình (2) có 2 nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$

=> phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt: $x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$

Theo đề bài ta có

$x_4 - 2x_3 + 2x_2 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_4 - x_1 = 2\left(x_3 - x_2\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 4t_1 (4).$

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1t_2 = 2m + 6 \end{cases}$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $5t_1 = 2m$ và $4t_1^2 = 2m + 6 \Rightarrow 16m^2 - 50m - 150 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{15}{8} \\ m = 5 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện suy ra với $m = 5$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu 2020-2021)*

Cho đa thức $P(x) = (x-2)(x+4)(x^2+ax-8)+bx^2$ với a,b là hai số thực thỏa mãn $a+b<1$. Chứng minh phương trình $P(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+2x-8)(x^2+ax-8)+bx^2=0 \Leftrightarrow (x^2-8)^2+(a+2)x(x^2-8)+(2a+b)x^2=0$

- $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.
- $x \neq 0, PT \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2-8}{x}\right)^2+(a+2)\left(\dfrac{x^2-8}{x}\right)+2a+b=0$

Đặt $t=\dfrac{x^2-8}{x}$, ta được phương trình $t^2+(a+2)t+2a+b=0$

Ta có $\Delta=(a+2)^2-4(2a+b)=a^2-4(a+b-1)>0$ nên phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2.

Do đó phương trình cho $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-t_1x-8=0\ (1) \\ x^2-t_2x-8=0\ (2) \end{array}\right.$

Ta thấy mỗi phương trình $(1), (2)$ có hai nghiệm phân biệt và hai phương trình này không có nghiệm chung nên phương trình cho có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 19. *(Trường chuyên tin tỉnh Gia Lai 2020-2021)*

Cho phương trình bậc hai $x^2-2mx+m^2-4m+1=0 \quad (1)$ (m là tham số).

a) Tìm điều kiện của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1(3x_2+5x_1)+x_2(3x_1+5x_2)-3}=5$.

Lời giải

a) Để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta'>0$

$\Delta'=(m)^2-(m^2-4m+1)=4m-1$

$\Delta'>0 \Leftrightarrow 4m-1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$

Vậy $m>\dfrac{1}{4}$.

b) Với điều kiện $m > \frac{1}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - 4m + 1 \end{cases}$.

$$x_1\left(3x_2 + 5x_1\right) + x_2\left(3x_1 + 5x_2\right) - 3 = 5\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 - 3$$

$$\Rightarrow x_1\left(3x_2 + 5x_1\right) + x_2\left(3x_1 + 5x_2\right) - 3 = 5\left(2m\right)^2 - 4\left(m^2 - 4m + 1\right) - 3$$

$$= 16m^2 + 16m - 7$$

$$\sqrt{x_1\left(3x_2 + 5x_1\right) + x_2\left(3x_1 + 5x_2\right) - 3} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 16m - 7} = 5 \Leftrightarrow 16m^2 + 16m - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta nhận $m = 1$

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2020-2021)*

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + mx + 8 = 0$ và phương trình $x^2 + x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

b) Chứng minh rằng với *a, b, c* là các số thực khác 0 thì tồn tại ít nhất một trong các phương trình sau có nghiệm

$4ax^2 + 2(b+c)x + c = 0$ (1); $4bx^2 + 2(c+a)x + a = 0$ (2); $4cx^2 + 2(a+b)x + b = 0$ (3).

Lời giải

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + mx + 8 = 0$ và phương trình $x^2 + x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình

Khi đó ta có: $x_0^2 + mx_0 + 8 = 0$ (1) và $x_0^2 + x_0 + m = 0$ (2)

Suy ra: $(m-1)x_0 = m - 8$ (3)

Với $m = 1$ ta được hai phương trình $x^2 + x + 8 = 0$ và $x^2 + x + 1 = 0$ đều vô nghiệm.

Vậy *m = 1* không thỏa mãn.

Với $m \neq 1$ từ (3) suy ra $x_0 = \frac{m-8}{m-1}$ thay vào (2) ta được

$$m^3 - 24m + 72 = 0 \Leftrightarrow (m+6)(m^2 - 6m + 12) = 0 \Leftrightarrow m = -6$$

Khi $m = -6$ phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$ có hai nghiệm là 2 và 4 ;

phương trình $x^2 + x - 6 = 0$ có hai nghiệm là 2 và – 3.

Vậy $m = -6$ thì hai phương trình có nghiệm chung là 2.

b) Chứng minh rằng với *a, b, c* là các số thực khác 0 thì tồn tại ít nhất một trong các phương trình sau có nghiệm

$4ax^2 + 2(b+c)x + c = 0$ (1); $4bx^2 + 2(c+a)x + a = 0$ (2); $4cx^2 + 2(a+b)x + b = 0$ (3).

Với *a, b, c* là các số thực khác 0 nên các phương trình đã cho là phương trình bậc hai một ẩn.

Ta có: $\Delta'_{(1)} = (b+c)^2 - 4ac$; $\Delta'_{(2)} = (a+c)^2 - 4ab$; $\Delta'_{(3)} = (a+b)^2 - 4bc$

Suy ra: $\Delta'_{(1)} + \Delta'_{(2)} + \Delta'_{(3)} = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

Ta có: $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$

Suy ra: $\Delta'_{(1)} + \Delta'_{(2)} + \Delta'_{(3)} \geq 0$

Vậy trong ba phương trình đã cho tồn tại ít nhất một phương trình có nghiệm.

Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Kum Tum năm 2020-2021)*

Cho phương trình: $x^2 - 2mx - m^2 + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = 8$.

Lời giải

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -\dfrac{m}{2} \end{cases}$

Theo đề ra ta có: $(x_1-3)(x_2-3) = 5 \Leftrightarrow x_1x_2 - 3(x_1+x_2) = -4$

$$\Leftrightarrow \frac{-m}{2} - 3 = -4 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 22. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$ thỏa mãn $4x_1 = x_2^2$.

Lời giải

$x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2m-1 \end{array}\right.$

+) Nếu $1 < 2m - 1 \Leftrightarrow m > 1$

Từ giả thiết $4x_1 = x_2^2 \Leftrightarrow 4 = (2m-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-1 = 2 \\ 2m-1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{2} \\ m = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$

+) Nếu $2m - 1 < 1 \Leftrightarrow m < 1$

$4x_1 = x_2^2 \Leftrightarrow 1 = 4(2m-1) \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{8}$

Kết luận $m \in \left\{\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{8}\right\}$.

Câu 23. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2020-2021)*

Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ trong đó $m^2 + n^2 = 2020$. Chứng minh nếu phương trình có nghiệm x_0 thì $|x_0| < \sqrt{2021}$.

Lời giải

Vì x_0 là nghiệm phương trình $x_0^2+mx_0+n=0 \Rightarrow x_0^2=-mx_0-n$

Ta có $x_0^4=\left(mx_0+n\right)^2 \le \left(m^2+n^2\right)\left(x_0^2+1\right)=2020\left(x_0^2+1\right)$

$\Rightarrow x_0^4-1<2020\left(x_0^2+1\right) \Leftrightarrow x_0^4-2020x_0^2-2021<0$

$$\Leftrightarrow \left(x_0^2+1\right)\left(x_0^2-2021\right)<0 \Leftrightarrow x_0^2<2021 \Leftrightarrow \left|x_0\right|<\sqrt{2021}$$

Chuyên đề 5

HÀM SỐ - ĐA THỨC

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2020-2021)*

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -mx + 2 - m$ (m là tham số). Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $T = \dfrac{1}{(x_1+1)^4} + \dfrac{1}{(x_2+1)^4}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét $(P): y = x^2$ và $(d): y = -mx + 2 - m$

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^2 = -mx + 2 - m$

$\Leftrightarrow x^2 + mx + m - 2 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$\Delta > 0; \Delta = m^2 - 4(m-2)$

Hay: $m^2 - 4(m-2) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 8 > 0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 + 4 > 0, \forall m$

Theo định lý Vi -et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1.x_2 = m - 2 \end{cases}$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2m + 4$

Có $T = \dfrac{1}{(x_1+1)^4} + \dfrac{1}{(x_2+1)^4}$

$$= \frac{(x_2+1)^4 + (x_1+1)^4}{(x_1+1)^4(x_2+1)^4}$$

$$= \frac{\left[(x_2+1)^2 + (x_1+1)^2\right]^2 - 2\left[(x_1+1)(x_2+1)\right]^2}{\left[(x_1+1)(x_2+1)\right]^4}$$

$$= \frac{(x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^4}$$

$$= \frac{(m^2 - 2m + 4 - 2m + 2)^2 - 2(m - 2 - m + 1)^2}{(m - 2 - m + 1)^4}$$

$$=\frac{(m^2-4m+6)^2-2}{1}$$
$$=m^4-8m^3+28m^2-48m+36-2$$
$$=m^4-8m^3+28m^2-48m+34$$
$$=(m-2)^4+4(m-2)^2+2$$

Có $T \geq 2, \forall m$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 2 khi và chỉ khi: $m=2$.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Cà Mau năm 2020-2021)*

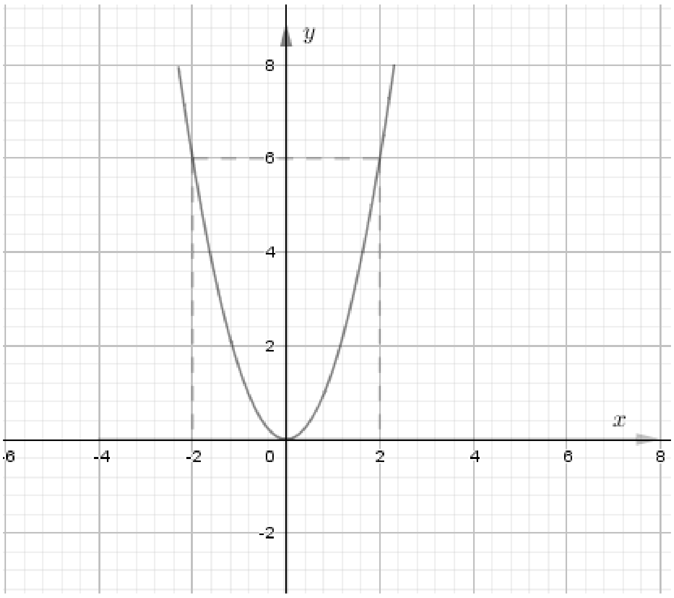
Cho (P) $y=\frac{3}{2}x^2$

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm m để đường thẳng $(\mathrm{d}): y=x+m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị



b) Tìm m để đường thẳng $(\mathrm{d}): y=x+m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$\frac{3}{2}x^2=x+m \Rightarrow 3x^2=2x+2m \Rightarrow 3x^2-2x-2m=0(*)$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt : $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Delta' = 1+6m>0$$
$$\Rightarrow m>-\frac{1}{6}$$

Vậy $m>-\frac{1}{6}$ thì (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2020-2021)*

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y=2x^2$. Gọi A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là: 1 và -2.

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

b) Tính tổng khoảng cách từ hai điểm A, B đến trục hoành.

Lời giải

a) Ta có $A(1;\,2)$, $B(-2;\,8)$

Gọi phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là: $y=ax+b$.

Ta có $A, B\in d \Leftrightarrow \begin{cases}1.a+b=2\\-2.a+b=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y=-2x+4$.

b) Ta có khoảng cách từ điểm $M(x;\,y)$ đến trục hoành là: $|y|$.

Suy ra: khoảng cách từ điểm A đến trục hoành là: $|y_A|$.

khoảng cách từ điểm B đến trục hoành là: $|y_B|$.

Vậy tổng khoảng cách từ hai điểm A, B đến trục hoành là: $|y_A|+|y_B|=2+8=10$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng chuyên toán năm 2020-2021)*

Chứng minh rằng hàm số $y=(-m^2+2m-10)x+2021$ luôn nghịch biến với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải

Xét $-m^2+2m-10=-(m^2-2m)-10=-(m-1)^2-9$;

Do $-(m-1)^2\le 0, \forall m\in\mathbb{R}$ và $-9<0$ nên ta có $-(m-1)^2-9<0, \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=(-m^2+2m-10)x+2021$ luôn nghịch biến với mọi giá trị của tham số m.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Nam năm 2020-2021)*

Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=2x+3$. Tìm tất cả giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng (d'): $y=4x+m$ cắt đường thẳng (d) tại điểm có hoành độ dương thuộc (P).

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2=2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=-1$ hoặc $x=3$. Vì điểm có hoành độ dương nên giá trị $x=3$ thoả mãn yêu cầu của đề bài.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (d) là:

$4x+m=2x+3 \Rightarrow 2x=3-m \Rightarrow x=\dfrac{3-m}{2}$.

Suy ra $\dfrac{3-m}{2}=3\Rightarrow 3-m=6\Rightarrow m=-3$.

Vậy với $m=-3$ thì (d') cắt (d) tại điểm có hoành độ dương thuộc (P).

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Hậu Giang năm 2020-2021)*

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P). Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).

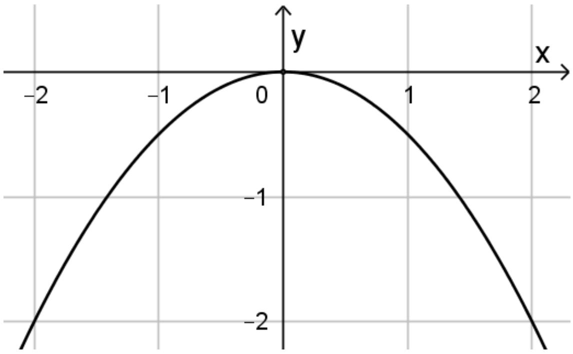
Lời giải

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Một số giá trị cụ thể: cho $x=0\Rightarrow y=0$. Cho $x=\pm 2\Rightarrow y=-2$.

Đồ thị



Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2020-2021)*

Cho Parabol *(P)* $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=4mx-m-3$ (m là tham số).

a) Tìm m để Parabol *(P)* cắt đường thẳng *d* tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm m để Parabol *(P)* cắt đường thẳng *d* tại hai điểm phân biệt có hoành độ cùng nhỏ hơn 1.

Lời giải

a) (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-4mx+m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-m-3>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \quad (*)$$

b) Với điều kiện (*) thì Parabol (P) cắt d tại hai điểm phân biệt. Khi đó, parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 cùng nhỏ hơn 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-1)(x_2-1)>0 \\ x_1+x_2<2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0 \\ x_1+x_2<2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)-4m+1>0 \\ 4m<2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{4}{3} \\ m<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được: parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 cùng nhỏ hơn 1 khi $m<-\frac{3}{4}$.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình năm 2020-2021)*

Cho hàm số: $y=(m-3)x+2n-5$ (1) có đồ thị là đường thẳng d (*với* m, n *là tham số*).

a) Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm m, n để đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(-2;4)$.

Lời giải

a) Để hàm số (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m-3>0 \Leftrightarrow m>3$

b) Vì $A(1;2)$ thuộc d nên $2=m-3+2n-5 \Leftrightarrow m+2n=10 \quad (*)$

Vì $B(-2;4)$ thuộc d nên $4=(m-3).(-2)+2n-5$

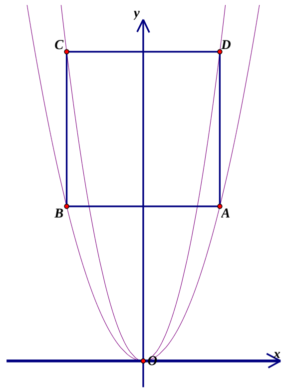
$$\Leftrightarrow -2m+2n=3 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $\begin{cases} m+2n=10 \\ -2m+2n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{7}{3} \\ n=\dfrac{23}{6} \end{cases}$

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2020-2021)*

Cho các parabol $(P_1): y=mx^2$, $(P_2): y=nx^2$ $(m\neq n)$. Lấy các điểm A, B thuộc (P_1) và C, D thuộc (P_2) sao cho $ABCD$ là hình vuông nhận Oy làm trục đối xứng. Tính diện tích hình vuông $ABCD$.

Lời giải



Gọi $A(a, ma^2)$. Khi đó do Oy là trục đối xứng của hình vuông nên $B(-a, ma^2)$. Do $DA//BC//Oy$ nên $C(-a, na^2), D(a, na^2)$

$AB = 2|a|, AD = |m-n|a^2;\ AB = AD \Rightarrow |a| = \dfrac{2}{|m-n|}$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S = AB^2 = \dfrac{16}{(m-n)^2}$

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Cho hàm số: $y = -\dfrac{3}{4}x + 3$ có đồ thị (d).

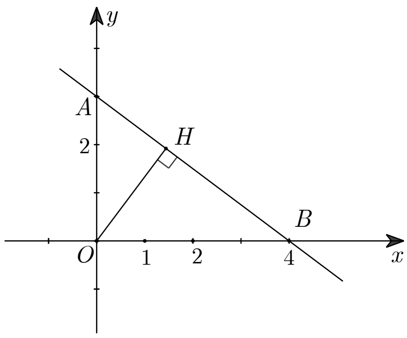
a) Vẽ đồ thị (d).

b) Gọi A là giao điểm của (d) với trục tung Oy; B là giao điểm của (d) với trục hoành Ox.

Tính chu vi tam giác OAB và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d).

Lời giải

a) Vẽ đúng đồ thị (d)



b) Tọa độ các giao điểm: $A(0;3)$; $B(4;0)$; $OA = 3, OB = 4$

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Chu vi tam giác OAB : $OA + OB + AB = 3 + 4 + 5 = 12$

Vẽ OH vuông góc với AB tại H .

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH , ta có:

$$OH = \frac{OA.OB}{AB} = \frac{12}{5}$$

Câu 11. *(Trường chuyên Gia Lai chuyên năm 2020-2021)*

Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=(m-1)x+m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó đi qua điểm $M(2;1)$.

Lời giải

Hàm số $y=(m-1)x+m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó đi qua điểm $M(2;1)$ nên

$$\begin{cases} m-1<0 \\ 1=2(m-1)+m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m^2+2m-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=-3$.

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $(d): y=2x-m$. Tìm *m* để đường thẳng *(d)* cắt hai trục *Ox*, *Oy* lần lượt tại *A* và *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 9.

Lời giải

Đường thẳng d cắt Ox, Oy lần lượt tại $A(\frac{m}{2};0), \mathrm{B}(0;-\mathrm{m})$

Diện tích tam giác OAB là: $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\left|\frac{m}{2}\right|.|-m|=\frac{m^2}{4}$

Theo đầu bài ta có: $\frac{m^2}{4}=9 \Leftrightarrow m=\pm 6$

Vậy $m=\pm 6$

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Yên Bái năm 2020-2021)*

Cho parabol (P): $y=2x^2$ và đường thẳng (d): $y=2x+m-1$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2-2x-m+1=0\,(*)$

(P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta'=2m-1>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}\cdot$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*) khi đó x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) Theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1.x_2=\dfrac{1-m}{2} \end{cases}\cdot$

Do đó $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 = 1 \Leftrightarrow 1 - 4\frac{(1-m)}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$. Thỏa mãn điều kiện $m > \frac{1}{2}$.

Vậy $m = 1$.

Câu 14. *(Trường chuyên Đồng Tháp năm 2020-2021)*

1. Cho $(P): y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Tìm giá trị của a biết rằng (P) đi qua điểm $M(-2;12)$.
2. Tính số đo góc tạo bởi đường thẳng $d: y = x + 8$ với trục hoành Ox.

Lời giải

a) (P) đi qua điểm $M(-2;12) \Rightarrow 12 = a(-2)^2$

$\Rightarrow a = 3$

b) Đường thẳng $d: y = x + 8$ cắt Ox tại $A(-8;0)$.

Đường thẳng $d: y = x + 8$ cắt Oy tại $B(0;8)$.

Góc tạo bởi đường thẳng d và Ox là góc $\widehat{OAB}$

Ta có $\tan\widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{|8|}{|-8|} = 1$

Góc tạo bởi đường thẳng $d: y = x + 8$ với trục Ox bằng $45°$.

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi năm 2020-2021)*

a) Cho hàm số $y = mx + m - 1$, với m là tham số. Chứng minh đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

b)Cho biểu thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực. Biết $f(1) = 2$, $f(2) = 3$. Tính giá trị của $Q = f(5) - 6f(3) + 2020$.

Lời giải

a) Xét điểm $A(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ.

Khi đó, A là điểm cố định khi và chỉ khi A thuộc đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$, với mọi m.

$\Leftrightarrow y_0 = mx_0 + m - 1, \ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) = 0, \ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1;-1)$

Vậy đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định $A(-1;-1)$ với mọi m.

b) Đặt $P(x) = f(x) - (x+1)$

Do đó $P(1) = 0, P(2) = 0$ hay $x = 1, x = 2$ là hai nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.

Mà P(x) là đa thức bậc ba nên ta có $P(x) = (x-1)(x-2)(x-m)$. Khi đó

$f(5) = P(5) + 6 = 4.3.(5 - m) + 6$

$f(3) = P(3) + 4 = 2.1.(3 - m) + 4$

Do vậy, $Q = f(5) - 6f(3) + 2020 = 12(5 - m) - 12(3 - m) - 18 + 2020 = 2026$.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $(d): y = 2x - m$ cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 - 2x + m = 0$ (1)

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

Tức là: $\begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$

Vậy với $0 < m < 1$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Chuyên đề 6

Chứng minh đẳng thức, tính giá trị biểu thức

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2020-2021)*

Giả sử a,b,c là các số thực khác 0 sao cho hệ phương trình $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$.

Lời giải

Cộng theo vế của các phương trình, ta có $(a+b+c)(x+y)=a+b+c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x+y=1 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $a+b+c=0$.

Khi đó $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b)=3abc \Rightarrow \dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$

Trường hợp 2. $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$.

Thay vào hệ ta có $\begin{cases} ax+b(1-x)=c \\ bx+c(1-x)=a \\ cx+a(1-x)=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a-b)=c-b \\ x(b-c)=a-c \end{cases}$ (II).

Nếu $\left[\begin{array}{l} a=b \\ b=c \end{array}\right.$ thì từ (II) suy ra $a=b=c$ ta được $a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow \dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$.

Nếu $\begin{cases} a\neq b \\ b\neq c \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x=\dfrac{c-b}{a-b} \\ x=\dfrac{a-c}{b-c} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{c-b}{a-b}=\dfrac{a-c}{b-c} \Leftrightarrow cb-c^2-b^2+bc=a^2-ab-ac+bc$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$ (vô lí do $a\neq b$, $b\neq c$).

Vậy trong trường hợp 2 ta có $a=b=c$.

Suy ra $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$.

Chú ý: Có thể giải theo cách sau $a^3+b^3+c^3=a^2(bx+cy)+b^2(cx+ay)+c^2(ax+by)$

$=ab(ax+by)+bc(bx+ay)+ac(cx+ay)=3abc$.

Suy ra $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn $x^3 = 3x - 1$, $y^3 = 3y - 1$ và $z^3 = 3z - 1$. Tính giá trị các biểu thức $S = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải

Theo giả thiết suy ra x, y, z là ba nghiệm của phương trình bậc 3 là $t^3 - 3t + 1 = 0$

Theo Viet $\begin{cases} x + y + z = 0(1) \\ xy + xz + yz = -3(2) \\ xyz = -1 \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 0 - 2 - (-3) = 6$

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Lạng Sơn năm 2020-2021)*

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^3 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^3 + \left(\sqrt{z} - \sqrt{x}\right)^3 = 0$.

Tính tổng $S = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^{2021} + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^{2021} + \left(\sqrt{z} - \sqrt{x}\right)^{2021}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = a \\ \sqrt{y} - \sqrt{z} = b \\ \sqrt{z} - \sqrt{x} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 0 \end{cases}$.

Mà $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right) = 0$.

Suy ra $a = b = c = 0$.

Vậy $S = a^{2021} + b^{2021} + c^{2021} = 0$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2020-2021)*

a) Cho các số thực x, y, z khác 0. Đặt $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ và $c = xy + \frac{1}{xy}$.

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$.

b) Cho các số thực a, b khác -2 thỏa mãn $(2a + 1)(2b + 1) = 9$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{2 + a} + \frac{1}{2 + b}$

Lời giải

a) Ta có

$$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow a^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 \Rightarrow b^2 - 2 = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

$$ab = (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$\Leftrightarrow ab = c + \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

$\Leftrightarrow abc = c^2 + (xy + \dfrac{1}{xy})(\dfrac{x^2 + y^2}{xy})$

$= c^2 + x^2 + y^2 + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}$

$= c^2 + x^2 + y^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2}$

$= c^2 + a^2 - 2 + b^2 - 2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$

(đpcm)

b) Với $a, b \neq -2$, ta có

$(2a+1)(2b+1) = 9$

$\Leftrightarrow 4ab + 2(a+b) = 8$

$\Leftrightarrow 2ab + a + b = 4$

$\Leftrightarrow a + b = 4 - 2ab$

Ta có

$A = \dfrac{1}{2+a} + \dfrac{1}{2+b} = \dfrac{a+b+4}{(2+a)(2+b)}$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{4-2ab+4}{ab+2(a+b)+4}$

$= \dfrac{8-2ab}{ab+2(4-2ab)+4}$

$= \dfrac{2(4-ab)}{12-3ab}$

$= \dfrac{2(4-ab)}{3(4-ab)}$

$= \dfrac{2}{3}$

Vậy $A = \dfrac{2}{3}$

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2020-2021)*

Cho $0 < x < y$ thỏa mãn $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Tính: $E = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Lời giải

Cho $0 < x < y$ thỏa mãn $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Tính: $E = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

Ta có: $2x^2 + 2y^2 = 5xy \Leftrightarrow 2x^2 - xy + 2y^2 - 4xy = 0$

$\Leftrightarrow x(2x - y) + 2y(y - 2x) = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow 2x = y$ (do $0 < x < y$).

Vậy $E=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{5x^2}{-3x^2}=-\dfrac{5}{3}$.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $ab=2$. Chứng minh

$$a^9+b^9=\left(a^4+b^4\right)\left(a^5+b^5\right)-16(a+b).$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}&\left(a^4+b^4\right)\left(a^5+b^5\right)-16(a+b)\\&=a^9+b^9+a^5b^4+a^4b^5-16(a+b)\\&=a^9+b^9+a^4b^4(a+b)-16(a+b)\\&=a^9+b^9+16(a+b)-16(a+b)\ (\text{do } ab=2)\\&=a^9+b^9.\end{aligned}$$

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là ba số thực phân biệt thỏa mãn $\dfrac{a^3+1}{a}=\dfrac{b^3+1}{b}=\dfrac{c^3+1}{c}$. Chứng minh rằng $abc+1=0$.

Lời giải

Đặt $\dfrac{a^3+1}{a}=\dfrac{b^3+1}{b}=\dfrac{c^3+1}{c}=m$. Ta có $\begin{cases}a^3-ma+1=0\\b^3-mb+1=0\\c^3-mc+1=0\end{cases}$ nên a,b,c là 3 nghiệm của đa thức

$f(x)=x^3-mx+1$

Do $f(x)$ có 3 nghiệm a,b,c nên $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

Từ đó suy ra $x^3-mx+1=(x-a)(x-b)(x-c)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $-abc=1\Rightarrow abc+1=0$

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2020-2021)*

Cho $xy+yz+xz=0$ và $xyz\neq 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}=3$.

Lời giải

Vì: $xy+yz+xz=0;\ xyz\neq 0\Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

Chứng minh được nếu: $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Áp dụng công thức trên ta có: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\Rightarrow \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}=\dfrac{3}{xyz}$

Lại có: $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}=xyz\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\right)=3$. (Đpcm)

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

Cho ba số $x,\ y,\ z$ thỏa mãn đồng thời: $x^2-2y+1=y^2-2z+1=z^2-2x+1=0$

Tính giá trị của biểu thức: $A=x^{1000}+y^{1000}+z^{1000}$

Lời giải

Ta có

$x^2-2y+1=y^2-2z+1=z^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=y-1=z-1=0 \Leftrightarrow x=y=z=1 \Rightarrow A=3$

Câu 10. *(Trường chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2020-2021)*

1. Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a+b+c=1$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng trong ba số a,b,c có ít nhất một số bằng 1.

2. Cho x,y,z là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2045$ và $(x-18)^3+(y-7)^3+(z-2020)^3=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$F=(x-18)^{2021}+(y-7)^{2021}+(z-2020)^{2021}.$$

Lời giải

1) Xét tích $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=abc-(ab+bc+ca)$

Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow ab+bc+ca=abc$

Suy ra $(a-1)(b-1)(c-1)=0$.

Vậy trong ba số a,b,c có ít nhất một số bằng 1.

2) Ta thấy, với ba số a,b,c tùy ý thì

$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)=(a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)-3ab(a+b)$

$=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$

Do đó, nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Đặt $a=x-18, b=y-7, c=z-2020$ từ giả thiết suy ra $a+b+c=0$. Theo trên suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Mặt khác, theo giả thiết ta có $a^3+b^3+c^3=0$ suy ra $3abc=0$.

Vậy $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $c=0$.

Nếu $a=0 \Rightarrow b+c=0$, khi đó $F=a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}=0+b^{2021}+(-b)^{2021}=0$.

Tương tự nếu $b=0$ hoặc $c=0$ thì cũng suy ra $F=0$.

Vậy $F=0$.

Câu 11. *(Trường chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2020-2021)*

Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2020$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\right):(a+b+c)$.

Lời giải

$$P=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)$$
$$=\frac{1}{a+b+c}\left[a\left(\frac{a+b+c}{b+c}-1\right)+b\left(\frac{a+b+c}{c+a}-1\right)+c\left(\frac{a+b+c}{a+b}-1\right)\right]$$
$$=\frac{1}{a+b+c}\cdot\left[\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)(a+b+c)-(a+b+c)\right]$$
$$=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}-1=2020-1=2019$$

Câu 11. *(Trường chuyên Phú Thọ năm 2020-2021)*

a) Cho $x+y+z=x^2+y^2+z^2=2$ và $xyz\neq 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{xyz}$.

b) Cho $0<x<2$ thỏa mãn $\dfrac{3\left(x^2+5x-1\right)}{x^2+x-1}+23=\dfrac{24\left(x^2+3x-1\right)}{x^2+2x-1}$.

Tính giá trị của biểu thức $T=\left(x^2-x-2\right)^{2020}+\dfrac{1}{\left(x^2-x\right)^{2021}}$.

Lời giải

a) Từ $x+y+z=2$ có được $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=4$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx=1$$

Do $xyz\neq 0$ nên ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{xyz}$ (đpcm)

b) Điều kiện $\begin{cases}x^2+x-1\neq 0\\ x^2+2x-1\neq 0\end{cases}$

$$\frac{3\left(x^2+5x-1\right)}{x^2+x-1}+23=\frac{24\left(x^2+3x-1\right)}{x^2+2x-1}\Leftrightarrow\frac{3\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)+5\right]}{\left(x-\frac{1}{x}\right)+1}+23=\frac{24\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)+3\right]}{\left(x-\frac{1}{x}\right)+2}$$

Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}$ có phương trình trở thành: $t^2-3t+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=2\end{array}\right.$.

$$\left[\begin{array}{l}x-\dfrac{1}{x}=1\\ x-\dfrac{1}{x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-1=0\\ x^2-2x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ x=1+\sqrt{2};\ x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vì $0 < x < 2$ và đối chiếu điều kiện nên có được $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Vậy $T = \left(x^2 - x - 2\right)^{2020} + \dfrac{1}{\left(x^2 - x\right)^{2021}}$

$$= \left(x^2 - x - 1 - 1\right)^{2020} + \frac{1}{\left(x^2 - x - 1 + 1\right)^{2021}} = \left(-1\right)^{2020} + \frac{1}{\left(1\right)^{2021}} = 2$$

Chuyên đề 7

Giải toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình, toán thực thế

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Cà Mau năm 2020-2021)*

Vừa qua, chính phủ đã điều chỉnh giảm 10% giá bán lẻ điện từ bậc 1 đến bậc 4 cho khách hàng sử dụng điện sinh hoạt bị ảnh hưởng bởi dịch $Covid-19$ trong ba tháng $4,5,6$ của năm. Cụ thể như sau:

BẬC	**GIÁ BÁN ĐIỆN** *(đã làm tròn đến đơn vị đồng/kWh)*	
	Tháng 3 (Trước điều chỉnh)	**Tháng 4 (Sau điều chỉnh)**
Bậc 1: Cho kWh từ 0 - 50	1678 đồng/kWh	1510 đồng/kWh
Bậc 2: Cho kWh từ 51 – 100	1734 đồng/kWh	1561 đồng/kWh
Bậc 3: Cho kWh từ 101 – 200	2014 đồng/kWh	1813 đồng/kWh
Bậc 4: Cho kWh từ 201 - 300	2536 đồng/kWh	2282 đồng/kWh
Bậc 5: Cho kWh từ 301 – 400	2834 đồng/kWh	2834 đồng/kWh
Bậc 6: Cho kWh từ 401 - 500	2927 đồng/kWh	2927 đồng/kWh

Dựa vào các số liệu của bảng trên hãy giải bài toán sau.

Gia đình của dì Năm Huệ đã trả tổng cộng 249580 đồng tiền điện sinh hoạt cho tháng 3 và tháng 4 năm 2020. Biết rằng trong hai tháng đó gia đình dì Năm Huệ tiêu thụ hết $155kWh$ và mỗi tháng mức điện tiêu thụ chưa đến $100kWh$ nhưng lớn hơn $50kWh$. Hãy tính xem điện tiêu thụ trong tháng 4 của gia đình dì Năm Huệ là bao nhiêu kWh ?

Lời giải

Gọi mức tiêu thụ tháng 3 và tháng 4 của nhà dì Năm Huệ là $a,b\left(kWh,50<a,b<100\right)$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} a+b=155 \\ 50.1675+\left(a-50\right).1734+50.1510+\left(b-50\right).1561=249580 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=155 \\ 1734a+1561b=254930 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=75(\text{thỏa mãn}) \\ b=90(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$

Vậy điện tiêu thụ trong tháng 4 của nhà dì Năm Huệ là $90kWh$.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Cà Mau năm 2020-2021)*

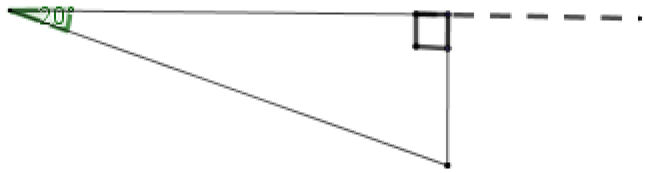
Tàu ngầm đang ở trên mặt biển bỗng đột ngột lặn xuống theo phương tạo ra với mặt nước biển một góc 20°

a) Nếu tàu chuyển động theo phương thẳng lặn xuống được $400m$ thì nó ở độ sâu bao nhiêu mét?

b) Tàu phải chạy bao nhiêu mét để đạt đến độ sâu $1000m$.

Lời giải

a) Nếu tàu chuyển động theo phương thẳng lặn xuống được $400m$ thì nó ở độ sâu bao nhiêu mét?



Độ sâu của tàu là cạnh góc vuông đối diện góc 20°, đoạn đường đi của tàu là cạnh huyền, khoảng cách theo phương nằm ngang là cạnh kề của góc nhọn.

Độ sâu của tàu đạt được là : $400.\sin 20^\circ \approx 136,8\ (m)$.

b) Tàu phải chạy bao nhiêu mét để đạt đến độ sâu $1000m$.

Đoạn đường tàu chạy được là: $\dfrac{1000}{\sin 20^\circ} \approx 2923,8(m)$.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Nông năm 2020-2021)*

Một ô tô chạy từ A đến B với quãng đường dài 80km trong một thời gian dự định. Vì trời mưa nên một phần tư quãng đường đầu ô tô phải chạy chậm hơn vận tốc dự định là 15 km/h. Để đến B đúng thời gian dự định nên quãng đường còn lại ô tô phải tăng vận tốc hơn vận tốc dự định là 10 km/h. Tính thời gian dự định của ô tô. (Giả thiết xe chạy liên tục không nghỉ).

Lời giải

Gọi vận tốc dự định là $v\ (km/h)$, $(v>15)$.

Thời gian ô tô dự định đi từ A đến B là $\dfrac{80}{v}\ (h)$.

Thời gian ô tô đi khi trời mưa trong một phần tư quãng đường với vận tốc chậm hơn vận tốc dự định 15 km/h là $\dfrac{\frac{1}{4}.80}{v-15} = \dfrac{20}{v-15}\ (h)$.

Thời gian ô tô đi trong quãng đường còn lại, ô tô tăng vận tốc lớn hơn vận tốc dự định $10\,km/h$ là $\frac{80-20}{v+10}=\frac{60}{v+10}(h)$.

Thời gian đi từ A đến B không đổi nên

$$\frac{80}{v}=\frac{20}{v-15}+\frac{60}{v+10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{v}=\frac{1}{v-15}+\frac{3}{v+10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{v}=\frac{v+10+3v-45}{(v-15)(v+10)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{v}=\frac{4v-35}{(v-15)(v+10)}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(v^2-5v-150\right)=v(4v-35)$$

$$\Leftrightarrow 15v=4.150 \Leftrightarrow v=40.$$

Thời gian dự định của ô tô đi từ A đến B là $t=\frac{80}{40}=2\,(h)$.

Vậy thời gian đi từ A đến B là 2 giờ.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Hà Giang chuyên toán năm 2020-2021)*

Một tam giác vuông có chu vi bằng 72cm và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền có độ dài bằng 15cm. Tính diện tích của tam giác đó.

Lời giải

Gọi độ dài hai cạnh góc vuông là $a,\ b$. $(a,\ b>0)$

Vì đường trung tuyến ứng với cạnh huyền có độ dài bằng 15cm nên cạnh huyền bằng $2.15=30\,(cm)$.

Do chu vi bằng 72cm nên ta có $a+b+30=72 \Leftrightarrow a+b=42\ (1)$.

Mặt khác theo định lý Pytago ta được $a^2+b^2=30^2\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a+b=42 \\ a^2+b^2=30^2 \end{cases} \Rightarrow 2ab=(a+b)^2-\left(a^2+b^2\right)=864 \Rightarrow ab=432$$

Vậy diện tích của tam giác đó là : $S=\frac{ab}{2}=216cm^2$.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Một tổ chức từ thiện cần chia đều một số quyển vở thành các phần quà để tặng cho các cháu nhỏ ở một trung tâm nuôi dạy trẻ mồ côi. Nếu mỗi phần quà giảm 6 quyển vở thì sẽ có thêm 5 phần quà nữa cho các cháu, còn nếu mỗi phần quà giảm 10 quyển vở thì các cháu sẽ có thêm 10 phần quà. Hỏi tổ chức từ thiện trên có bao nhiêu quyển vở.

Lời giải

Gọi tổng số vở là x (quyển), số vở mỗi phần là y (quyển) ($x, y \in N$)

Số phần quà là $\frac{x}{y}$ (phần)

Nếu giảm mỗi phần quà đi 6 quyển thì số phần quà là $\frac{x}{y-6}$ (phần quà) $\Rightarrow \frac{x}{y-6} = \frac{x}{y} + 5$

Nếu giảm mỗi phần quà đi 10 quyển thì số phần quà là $\frac{x}{y-10}$ (phần quà)

$\Rightarrow \frac{x}{y-10} = \frac{x}{y} + 10$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{x}{y-6} = \frac{x}{y} + 5 \\ \frac{x}{y-10} = \frac{x}{y} + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y(y-6)} = \frac{5}{6} \\ \frac{x}{y(y-10)} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{y-10}{y-6} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6(y-10) = 5(y-6) \Leftrightarrow y = 30$

$\Rightarrow x = y(y-10) = 30.20 = 600$

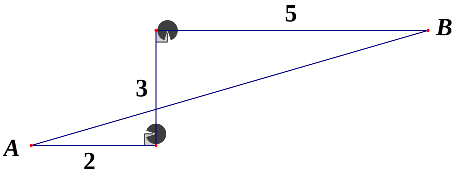
Vậy tổ chức từ thiện có 600 quyển vở.

.

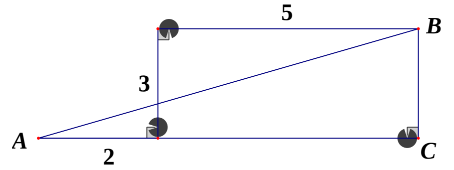
Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2020-2021)*

Một con Robot được thiết kế có thể đi thẳng, quay một góc 90^0 sang phải hoặc sang trái. Robot xuất phát từ vị trí A đi thẳng $2m$ quay sang trái rồi đi thẳng $3m$, quay sang phải rồi đi thẳng $5m$ đến đích tại vị trí B. Tính khoảng cách giữa đích đến và nơi xuất phát của Robot.

Lời giải



Kẻ $AC \perp BC$ như hình vẽ:



Ta có: $AC = 7; BC = 3$

$\Rightarrow AB = \sqrt{7^2 + 3^3} = \sqrt{58}$

Vậy khoảng cách giữa đích đến và nơi xuất phát của Robot là $\sqrt{58}$

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài 96km, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách bến B là 100km, thời gian ca nô xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc của dòng nước là 4km/h.

Lời giải

Gọi vận tốc thực của ca nô là *x (km/h) (x > 4)*

Vận tốc xuôi dòng là: $x+4$; vận tốc ngược dòng là: $x-4$

Thời gian xuôi dòng là $\frac{96}{x+4}$, thời gian ngược dòng là $\frac{100}{x-4}$.

Theo bài ra ta có phương trình $\frac{100}{x-4}-\frac{96}{x+4}=\frac{1}{2}(1)$

$(1) \Leftrightarrow x^2-8x-1584=0$

Giải phương trình được $x_1=44; x_2=-36(KTM)$.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 800 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kỹ thuật nên tổ I đã vượt mức 15% và tổ II đã vượt mức 20%, vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 145 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch?

Lời giải

Gọi số sản phẩm được giao theo kế hoach của tổ I và tổ II lần lượt là x, y $\left(x, y \in \mathrm{N}^*\right)$

Từ giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=800 \\ 15\%x+20\%y=145 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=300 \\ y=500 \end{cases}$$

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

Một cửa hàng bán giày với hình thức khuyến mại như sau: Nếu bạn mua một đôi giày với mức giá ban đầu, bạn sẽ được giảm giá 30% khi mua đôi thứ hai và giảm giá 50% khi mua đôi thứ ba. Bạn An đã mua 3 đôi giày và phải trả 1 320 000 đồng.

a) Hỏi giá ban đầu của một đôi giày là bao nhiêu?

b) Nếu cửa hàng đưa ra hình thức khuyến mại thứ hai là giảm 25% cho mỗi đôi giày thì bạn An nên chọn hình thức khuyến mại nào nếu bạn An mua ba đôi giày.

Lời giải

a) Gọi giá ban đầu của 1 đôi giày là x (đồng). Điều kiện: x >0

Giá của đôi giày mua thứ 2 là: $\frac{7}{10}x$ (đồng)

Giá của đôi giày mua thứ 2 là: $\frac{5}{10}x$ (đồng)

Số tiền phải trả khi mua 3 đôi giày là: $x+\frac{7}{10}x+\frac{1}{2}x=\frac{11}{5}x$ (đồng)

Theo đầu bài ta có: $\frac{11}{5}x=1320000 \Leftrightarrow x=600000$ (đồng)

Vậy giá ban đầu của 1 đôi giày là 600 000 (đồng).

b) Giá mỗi đôi giày sau khi giảm giá 25% là: $\frac{75}{100}600000 = 450\ 000$ (đồng)

Số tiền phải trả khi mua 3 đôi giày là: $3.450000 = 1350000$ (đồng)

Vậy bạn An nên chọn hình thức khuyến mại thứ nhất.

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Trong đợt dịch **Covid-19**, theo kế hoạch thì hai tổ I và II của công ty may X phải sản xuất 10000 khẩu trang y tế trong thời gian hai ngày để kịp thời cung cấp cho người dân. Do được cải tiến kỹ thuật nên tổ I làm vượt mức 15% và tổ II vượt mức 20% so với kế hoạch ban đầu của mỗi tổ. Vì vậy, sau hai ngày họ đã làm được nhiều hơn 1700 khẩu trang so với kế hoạch. Tính số khẩu trang làm được của mỗi tổ sau khi cải tiến kỹ thuật.

Lời giải

Gọi x,y $(x,y \in N^*)$ lần lượt là số khẩu trang dự định may ban đầu của tổ I và tổ II. Ta có $x + y = 10000$

Sau khi cải tiến kỹ thuật, ta có $\frac{15}{100}x + \frac{20}{100}y = 1700$

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 10000 \\ \frac{15}{100}x + \frac{20}{100}y = 1700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6000 \\ y = 4000 \end{cases}$ (tmđk)

Số sản phẩm làm được khi thay thiết bị mới :

+) của tổ I là $\left(1 + \frac{15}{100}\right)6000 = 6900$ (khẩu trang)

+) của tổ II là $\left(1 + \frac{20}{100}\right)4000 = 4800$ (khẩu trang)

Chuyên đề 8

CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ để biểu thức $\dfrac{a^2-3}{ab+3}$ nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương a^2-3 chia hết cho $ab+3$

$\Rightarrow b(a^2-3)\,\vdots\,(ab+3) \Rightarrow [a(ab+3)-3(a+b)]\,\vdots\,(ab+3)$

$\Rightarrow 3(a+b)\,\vdots\,(ab+3)$

Đặt $3(a+b)=k(ab+3)$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Nếu $k=1$ thì $3(a+b)=ab+3 \Rightarrow (a-3)(b-3)=6$

Vì a, $b\in\mathbb{N}^*$ nên $a-3\ge -2$ và $b-3\ge -2$

Trường hợp 1: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-3=6\\b-3=1\end{cases}\\\begin{cases}a-3=1\\b-3=6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=9\\b=4\end{cases}\\\begin{cases}a=4\\b=9\end{cases}\end{array}\right.$. Thử lại thì $(a;b)=(9;4)$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-3=3\\b-3=2\end{cases}\\\begin{cases}a-3=2\\b-3=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=6\\b=5\end{cases}\\\begin{cases}a=5\\b=6\end{cases}\end{array}\right.$. Thử lại thì $(a;b)=(6;5)$ thỏa mãn.

Nếu $k=2$ thì $3(a+b)=2(ab+3) \Rightarrow (2a-3)(2b-3)=-3$

Vì a, $b\in\mathbb{N}^*$ nên $2a-3\ge -1$ và $2b-3\ge -1$

Ta có $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a-3=3\\2b-3=-1\end{cases}\\\begin{cases}2a-3=-1\\2b-3=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\\\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\end{array}\right.$. Thử lại thì $(a;b)=(3;1)$ thỏa mãn.

Nếu $k\ge 3$ thì $3(a+b)=k(ab+3)\ge 3(ab+3) \Leftrightarrow (a-1)(b-1)+2\le 0$ (vô lý vì a, $b\in\mathbb{N}^*$).

Vậy các cặp số $(a;b)$ thỏa mãn là $(3;1)$; $(6;5)$; $(9;4)$.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2020-2021)*

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n(2n+7)(7n+1)$ luôn chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $4a+1$ và $4b-1$ nguyên tố cùng nhau; $a+b$ là ước của $16ab+1$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n(2n+7)(7n+1)$ luôn chia hết cho 6.

Đặt $P=n(2n+7)(7n+1)$.

+ Với $n\,\vdots\,2$, suy ra $P=n(2n+7)(7n+1)\,\vdots\,2$.

Với n không chia hết cho 2 thì $7n+1\,\vdots\,2 \Rightarrow P\,\vdots\,2$.

Vậy với $\forall n, P\,\vdots\,2$. (1).

+ Với $n=3k \Rightarrow P\,\vdots\,3$.

+ Với $n=3k+1 \Rightarrow 2n+7=6k+9\,\vdots\,3$.

+ Với $n=3k+2 \Rightarrow 7n+1=21k+15\,\vdots\,3$.

Suy ra với $\forall n, P\,\vdots\,3$. (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $P\,\vdots\,6, \forall n$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $4a+1$ và $4b-1$ nguyên tố cùng nhau; $a+b$ là ước của $16ab+1$.

Ta có: $(4a+1)(4b+1)=16ab+1+4(a+b) \Rightarrow (4a+1)(4b+1)\,\vdots\,a+b$.

$16ab+1\,\vdots\,a+b \Rightarrow 16b(a+b)-16b^2+1\,\vdots\,a+b \Rightarrow -16b^2+1\,\vdots\,a+b \Leftrightarrow (4b-1)(4b+1)\,\vdots\,a+b$.

Theo bài $(4a+1, 4b-1)=1$ $(1) \Rightarrow 4b+1\,\vdots\,a+b$. Vì $0<4b+1<4(a+b)$ nên ta có ba khả năng sau:

+ TH1: $4b+1=a+b \Leftrightarrow a=3b+1$.

Đặt $p=(4a+1,4b-1) \Leftrightarrow p=(12b+5,4b-1) \Rightarrow 12b+5-3(4b-1)\,\vdots\,p \Leftrightarrow 8\,\vdots\,p$.

Mà p là số lẻ nên $p=1$, thỏa mãn (1).

+ TH2: $4b+1=2a+2b \Leftrightarrow 2b+1=2a$ (không có giá trị thỏa mãn).

+ TH3: $4b+1=3a+3b \Leftrightarrow b=3a-1$.

Đặt $p=(4a+1,4b-1) \Leftrightarrow p=(4a+1,12a-5) \Rightarrow 12a-5-3(4a+1)\,\vdots\,p \Rightarrow 8\,\vdots\,p$.

Mà p là số lẻ nên $p=1$, thỏa mãn (1).

Vậy $\begin{cases} b\in\mathbb{N}^* \\ a=3b+1 \end{cases}$ và $\begin{cases} a\in\mathbb{N}^* \\ b=3a-1 \end{cases}$.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Lăk năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x,y) của phương trình $6x+5y+18=2xy$.

Lời giải

$6x+5y+18=2xy \Leftrightarrow 2xy-6x-5y=18$

$\Leftrightarrow 2xy-6x+15-5y=33 \Leftrightarrow 2x(y-3)-5(y-3)=33 \Leftrightarrow (2x-5)(y-3)=33=1.33=3.11$

Có x, y nguyên dương, nên $2x-5\ge -3, y-3\ge -2$.

ta xét các trường hợp sau:

$\begin{cases} y-3=1 \\ 2x-5=33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=4 \end{cases}$

$\begin{cases} y-3=33 \\ 2x-5=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=36 \end{cases}$

$\begin{cases} y-3=11 \\ 2x-5=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=14 \end{cases}$

$\begin{cases} y-3=3 \\ 2x-5=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$.

Các cặp số nguyên dương đều thỏa mãn bất đẳng thức trên,

Vậy các cặp số cần tìm là: $(3,36)$, $(4,14)$, $(8,6),(19,4)$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2020-2021)*

1. Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho $2n+2021$ và $3n+2020$ đều là các số chính phương.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $\dfrac{x^2-2}{xy+2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

1. Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho $2n+2021$ và $3n+2020$ đều là các số chính phương

Giả sử tồn tại số nguyên n để $2n+2021$; $3n+2020$ là số chính phương.

Khi đó, đặt $2n+2021=a^2$; $3n+2020=b^2$ $(a;b\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow 3a^2-2b^2=2023 \Rightarrow 3a^2=2b^2+2023$ lẻ

$\Rightarrow a$ lẻ $\Rightarrow a^2\equiv 1 \ (\text{mod}\,8)$

$\Rightarrow 2b^2=3a^2-2023\equiv 3.1-2023\equiv 4\ (\text{mod}\,8)$

$\Rightarrow b^2\equiv 2(\text{mod}\,8)$

Vô lý vì số chính phương chia 8 chỉ có số dư là $0;1;4;8$. Do đó điều giả sử sai. Không tồn tại số nguyên n thỏa mãn.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $\dfrac{x^2-2}{xy+2}$ có giá trị là số nguyên.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{y(x^2-2)}{xy+2}$ là số nguyên.

Ta có $\dfrac{y(x^2-2)}{xy+2}=\dfrac{x(xy+2)-2(x+y)}{xy+2}=x-\dfrac{2(x+y)}{xy+2}$

Suy ra tồn tại giá trị k nguyên dương sao cho $2(x+y)=k(xy+2)$

Nếu $k\ge 2$ ta có $k(xy+2)\ge 2(xy+2)$ suy ra $x+y\ge xy+2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)+1\le 0$ (1).

Do $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(y-1) \ge 0$ nên bất phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $k = 1$ ta có $2(x+y) = xy + 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 2\ (2)$.

Giải ra ta được các cặp $(x; y)$ thỏa mãn (2) là: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Thử lại ta có $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ là cặp số nguyên duy nhất thỏa mãn.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho ab là ước của $a^2 + b$.

Lời giải

$a^2 + b \vdots ab \Rightarrow \begin{cases} a^2 \vdots b \\ b \vdots a \end{cases} \Rightarrow a \le b \le a^2\ (a, b \in \mathbb{Z}^+)$

Đặt $b = ka\ (k \in \mathbb{Z}^+)$

$\Rightarrow a^2 + b \vdots ka^2 \Rightarrow a^2 + b \ge ka^2 \ge a^2\ (k \in \mathbb{Z}^+)$

$\Rightarrow 2a^2 \ge ka^2 \ge a^2\ (k \in \mathbb{Z}^+) \Rightarrow 2 \ge k \ge 1\ (k \in \mathbb{Z}^+)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$

Với $k = 1$ ta có: $b = a \Rightarrow a^2 + a \vdots a^2 \Rightarrow a \vdots a^2 \Rightarrow a = 1 = b$

Với $k = 2$ ta có: $\begin{cases} b = 2a \\ b = a^2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 4$

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 18n + 2020$ là số chính phương.

Lời giải

Vì $n^2 + 18n + 2020$ là số chính phương nên ta đặt $n^2 + 18n + 2020 = k^2$

$\Leftrightarrow (n+9)^2 + 1939 = k^2$

$\Leftrightarrow k^2 - (n+9)^2 = 1939 \Leftrightarrow (k-n-9)(k+n+9) = 7.277$

$\Rightarrow \begin{cases} k - n - 9 = 7 \\ k + n + 9 = 277 \end{cases} (Do\, n, k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 142 \\ n = 126 \end{cases}$.

Vậy $n = 126$.

Câu 7. *(Trường chuyên tin Lạng Sơn năm 2020-2021)*

1) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a - 1$ và $b + 2021$ đều chia hết cho 6. Chứng minh $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p là ước của 5^p-2^p. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $\dfrac{\left(5^p-2^p\right)\left(5^p-2^p\right)}{p.q}$ là một số nguyên.

Lời giải

1) Ta có: $4^a+a+b=\left(4^a+2\right)+\left(a-1\right)+\left(b+2021\right)-2022$.

Mà $4^a+2=\left(4^a-1\right)+3=\left(4-1\right).\left(4^{a-1}+4^{a-2}+...+4+1\right)+3\vdots 3$

Và 4^a+2 là số chẵn nên chia hết cho 2.

Suy ra $(4^a+2)\vdots 6$

Theo bài ra $(a-1)\vdots 6,\ \ (b+2021)\vdots 6$.

Lại có $2022\vdots 6$.

Suy ra $4^a+a+b=\left(4^a+2\right)+\left(a-1\right)+\left(b+2021\right)-2022\vdots 6$.

2) Vì $\left(5^p-2^p\right)\vdots p$. Theo định lí Fermat nhỏ ta có:

$5^p\equiv 5\left(\bmod p\right);\ 2^p\equiv 2\left(\bmod p\right)\Rightarrow 5^p-2^p\equiv 5-2\equiv 3\left(\bmod p\right)$

Mà p là số nguyên tố nên $p=3$.

Ta có $\dfrac{\left(5^p-2^p\right)\left(5^p-2^p\right)}{p.q}=\dfrac{\left(5^3-2^3\right)^2}{3q}=\dfrac{117^2}{3q}=\dfrac{3^2.13^2}{q}\in\mathbb{Z}$, q là số nguyên tố.

Suy ra $q=3;13$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}p=3;\ q=3\\ p=3;\ q=13\end{array}\right.$.

Câu 8. *(Trường chuyên Nam Định năm 2020-2021)*

a) Tìm các số nguyên x,y thoả mãn $x^3+y^2=xy^2+1$.

b) Cho các số nguyên dương a,b,c thoả mãn $c+\dfrac{1}{b}=a+\dfrac{b}{a}$. Chứng minh ab là lập phương của một số nguyên dương.

Lời giải

a) Ta có $x^3+y^2=xy^2+1\Leftrightarrow\left(x^3-1\right)-y^2\left(x-1\right)=0\ \Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+x+1-y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ y^2=x^2+x+1\end{array}\right.$.

+ Với $x=1$, khi đó phương trình có nghiệm $\left(1;y\right)$ với y là số nguyên.

+ Với $y^2=x^2+x+1\ \Leftrightarrow\left(2y\right)^2-\left(2x+1\right)^2=3\ \Leftrightarrow\left(2y-2x-1\right)\left(2y+2x+1\right)=3$.

Lập bảng xét các trường hợp

$2y-2x-1$	1	-1	3	-3
$2y+2x+1$	3	-3	1	-1
x	0	-1	-1	0

y	1	-1	1	-1

Vậy tập các giá trị $(x;y)$ thoả mãn là $\{(0;1),(0;-1),(-1;-1),(-1;1),(1;y),y\in\mathbb{Z}\}$.

b) Ta có $c+\dfrac{1}{b}=a+\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow abc+a=a^2b+b^2$

Suy ra a chia hết cho b, đặt $a=bk,k\in\mathbb{N}^*$, thay vào điều kiện ta được

$b^2kc+bk=b^3k^2+b^2\Leftrightarrow bkc+k=b^2k^2+b$.

Suy ra b chia hết cho k và k chia hết cho b, suy ra $b=k$, suy ra $ab=b^3$, ta có điều phải chứng minh.

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2020-2021)*

Phân tích số 210720202021 thành tổng của k số tự nhiên $a_1;a_2;\ldots;a_k$. Đặt $S=a_1^5+a_2^5+\ldots+a_k^5$. Tìm chữ số tận cùng của S.

Lời giải

Phân tích số 210720202021 thành tổng của k số tự nhiên $a_1;a_2;\ldots;a_k$. Đặt $S=a_1^5+a_2^5+\ldots+a_k^5$. Tìm chữ số tận cùng của S.

Với $n\in\mathbb{N}$ ta có $\left(n^5-n\right)\vdots 10$

Thật vậy $\left(n^5-n\right)=(n-1)n(n+1)\left(n^2+1\right)\vdots 2\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$\left(n^5-n\right)=\left[(n-1)n(n+1)(n-2)(n+2)+5n\left(n^2-1\right)\right]\vdots 5\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\left(n^5-n\right)\vdots 10\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Suy ra $\left(a_i^5-a_i\right)\vdots 10\quad(i=1;2;\ldots,k)$

$\Rightarrow\left[\left(a_1^5+a_2^5+\ldots+a_k^5\right)-\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)\right]\vdots 10$

$\Rightarrow(S-210720202021)\vdots 10$. Vậy S có số tận cùng là 1.

Câu 10. *(Trường chuyên Quảng Nam năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n thoả mãn 3^n-8 là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Đặt $3^n-8=a^3\Rightarrow 3^n=a^3+8$. Vì 3^n luôn là số lẻ nên a là số lẻ.

TH1: $a=1$

$3^n-8=1^3\Rightarrow 3^n=9\Rightarrow n=2$ (Thỏa mãn)

TH2: $a=2k+1(k\in N^*)$

$3^n-8=(2k+1)^3$

$\Rightarrow 3^n=(2k+1)^3+8$

$=(2k+1+2)\left[(2k+1)^2-2(2k+1)+4\right]$

$=(3k+3)\left(4k^2+3\right)$

$=3(k+1)\left(4k^2+3\right)$

Vì $VT = 3^n$ luôn là số lẻ. $VP = 3(k+1)(4k^2+3)$ luôn chẵn với $k \in N^*$ nên loại.

Vậy: $n = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 11. *(Trường chuyên Hậu Giang năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $\dfrac{n^2-5n+4}{n-5}$ là một số nguyên.

Lời giải

Ta có $\dfrac{n^2-5n+4}{n-5} = n + \dfrac{4}{n-5}$.

Khi đó $\dfrac{n^2-5n+4}{n-5} = n + \dfrac{4}{n-5}$ là số nguyên khi và chỉ khi $4 \vdots (n-5)$.

Câu 12. *(Trường chuyên Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh $15n+8$ là hợp số.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} 2n+1 = a^2 \\ 3n+1 = b^2 \end{cases} \left(a,\, b \in \mathbb{N}^*\right)$.

Khi đó ta có:

$9a^2 - b^2 = 9(2n+1) - (3n+1)$

$\Leftrightarrow (3a-b)(3a+b) = 15n+8.$

Vì $a,\, b \in \mathbb{N}^*$ suy ra $3a+b > 1$. Ta cần chứng minh $3a-b > 1$

Hay $3\sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1} > 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{2n+1} > 1 + \sqrt{3n+1}$

$\Leftrightarrow 9(2n+1) > 3n+2+2\sqrt{3n+1} \Leftrightarrow 15n+7 > \sqrt{12n+4}$ (luôn đúng)

Vậy $15n+8$ là hợp số.

Câu 13. *(Trường chuyên Tin Thái Nguyên năm 2020-2021)*

a) Tìm các cặp số nguyên dương $(x;\, y)$ thỏa mãn $x^2 = y^2 + y + 8$.

b) Chứng minh $P = 5 + 17^{2019} + 2020^{2021}$ không là số chính phương.

Lời giải

a) Ta có:

$x^2 = y^2 + y + 8$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 4y^2 + 4y + 32$

$\Leftrightarrow (2x)^2 = (2y+1)^2 + 31$

$\Leftrightarrow (2x-2y-1)(2x+2y+1) = 31$ (*)

Vì $x,\, y$ là các số nguyên dương nên ta có $1 \le 2x-2y-1 < 2x+2y+1$

Nên từ (*) suy ra $\begin{cases} 2x-2y-1 = 1 \\ 2x+2y+1 = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$

b) Ta có:

$5 \equiv 1(\text{mod } 4)$

$17 \equiv 1(\text{mod } 4) \Rightarrow 17^{2019} \equiv 1(\text{mod } 4)$

$2020^{2012} \equiv 0(\text{mod } 4)$

Suy ra $P \equiv 2(\text{mod } 4)$

Vậy P không là số chính phương vì một số chính phương chia cho 4 chỉ có dư là 0 hoặc 1.

Câu 14. *(Trường chuyên Quảng Ninh năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (*a; b*) sao cho $\dfrac{ab(a+b)}{ab+2}$ là số nguyên.

Lời giải

$$\frac{ab(a+b)}{ab+2} = (a+b) - \frac{2(a+b)}{ab+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2(a+b)}{ab+2} \in \mathbb{Z}$$

$a \geq 1,\ b \geq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \leq ab+1 < ab+2 \Rightarrow \dfrac{2(a+b)}{ab+2} < 2$.

$\dfrac{2(a+b)}{ab+2} > 0$, kết hợp với $\dfrac{2(a+b)}{ab+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{2(a+b)}{ab+2} = 1$

$\Leftrightarrow 2\text{a} + 2b = ab + 2 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 2$.

Kết hợp đk a, b nguyên $\Rightarrow \begin{cases} a-2=1 \\ b-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a-2=2 \\ a-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$.

KL: Các cặp số cần tìm là $(3;4)$ và $(4;3)$.

Câu 15. *(Trường chuyên Quảng Bình năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $M = n.4^n + 3^n$ chia hết cho 7.

Lời giải

Với $n = 2k\ \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ thì $M = 2k.4^{2k} + 3^{2k} = (2k+1).4^{2k} - (16^k - 9^k)$

Vì $(16^k - 9^k) \vdots 7$ và 4^{2k} không chia hết cho 7 nên

$M \vdots 7 \Leftrightarrow 2k+1 \vdots 7 \Rightarrow 2k = 7t - 1 \Rightarrow n = 7t - 1\ \left(t \in \mathbb{N}^*\right)$

Vì n chẵn nên t lẻ $\Rightarrow t = 2m+1 \Rightarrow n = 14m + 6\ \left(m \in \mathbb{N}\right)$

Thử lại, ta thấy $n = 14m + 6\ \left(m \in \mathbb{N}\right)$ thỏa mãn bài toán.

Với $n = 2k+1\ \left(k \in \mathbb{N}\right)$ thì

$M = (2k+1).4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 2k.4^{2k+1} + (4^{2k+1} + 3^{2k+1})$

Vì $(4^{2k+1}+3^{2k+1})\vdots 7$ và 4^{2k+1} không chia hết cho 7 nên

$M\vdots 7 \Leftrightarrow 2k\vdots 7 \Rightarrow k=7m \Rightarrow n=14m+1\ (m\in\mathbb{N})$

Thử lại, ta thấy $n=14m+1\ (m\in\mathbb{N})$ thỏa mãn bài toán.

Vậy $n=14m+6$ hoặc $n=14m+1\ (m\in\mathbb{N})$ thì M chia hết cho 7.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2020-2021)*

1. Tìm các số nguyên dương n để n^2+2020 là số chính phương.
2. Chứng minh rằng có thể chọn 3 số a_1, a_2, a_3 trong 7 số nguyên tố phân biệt bất kì sao cho $P=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)$ chia hết cho 216.

Lời giải

1) Gọi m là số nguyên dương sao cho $m^2=n^2+2020$.

Khi đó $(m+n)(m-n)=2^2.5.101$

Ta có $(m+n)+(m-n)=2m$ và $m+n>m-n$ nên $\begin{cases} m+n=202 \\ m-n=10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m+n=1010 \\ m-n=2 \end{cases}$

Giải ra ta được $m=106; n=96$ hoặc $m=506; n=504$

Vậy n^2+2020 là số chính phương khi $n=96$ hoặc $n=504$.

2) Trong 7 số nguyên tố phân biệt, có ít nhất 5 số lớn hơn 3. Chọn 5 số lớn hơn 3 đó. Các số trong 5 số này chia cho 3 có số dư là 1 hoặc 2. Như thế có ít nhất 3 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Chọn ra 3 số a_1, a_2, a_3

Khi đó các hiệu $a_i-a_j\vdots 6$. Vậy $P\vdots 216$

Câu 17. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An đề dự bị năm 2020-2021)*

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A=n^8-n^4$ chia hết cho 240.

b) Tìm các số nguyên dương a, b, c sao cho a^2+1 và b^2+1 đều là số nguyên tố đồng thời $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1$.

Lời giải

a) Ta có: $A=n^8-n^4=n^4(n^4-1)=n^4(n^2-1)(n^2+1)=n^4(n-1)(n+1)(n^2+1)$

$=n^4(n-1)(n+1)\left[(n^2-4)+5\right]=n^4(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n^4(n-1)(n+1)$

$\Rightarrow A\vdots 15$ với mọi n (1)

Nếu n là số chẵn $n^4\vdots 16 \Rightarrow A\vdots 16$

Nếu n là số lẻ thì $(n-1)(n+1)\vdots 8$ và $(n^2+1)\vdots 2 \Rightarrow A\vdots 16$

Từ đó $\Rightarrow A\vdots 16$ với mọi n (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A\vdots(16\times 15)=240$, vì $(15,16)=1$

b) $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1$ (1) Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow b^2(a^2+1)=c^2-a^2=(c-a)(c+a)$ (2) $\Rightarrow (c-a)(c+a) \vdots (a^2+1)$ và $c>a$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(c-a) \vdots (a^2+1) \Rightarrow c-a \geq a^2+1 \Rightarrow c \geq a^2+a+1 \\ (c+a) \vdots (a^2+1) \Rightarrow c+a \geq a^2+1 \Rightarrow c \geq a^2-a+1\end{array}\right.$$ (do a^2+1 là số nguyên tố).

Suy ra $c \geq a^2-a+1$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow b^2(a^2+1) \geq (a-1)^2(a^2+1) \Rightarrow b^2 \geq (a-1)^2 \Rightarrow b \geq a-1$. Kết hợp với $a \geq b$ suy ra $a=b$ hoặc $b=a-1$

TH1: $a=b$, thay vào (1) ta có $(a^2+1)^2=c^2+1 \Leftrightarrow (a^2+1-c)(a^2+1+c)=1$ (vô nghiệm vì $a^2+1+c \geq 3$)

TH2: $b=a-1 \Rightarrow a=b+1 \Rightarrow a^2+1=b^2+2b+2>2$. Mà a^2+1 là số nguyên tố $\Rightarrow b^2+2b+2$ là số lẻ $\Rightarrow b^2$ lẻ $\Rightarrow b^2+1$ là số nguyên tố chẵn

Suy ra $b^2+1=2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=2, c=3$

Vậy $(a,b,c) \in \{(1;2;3),(2;1;3)\}$

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2020-2021)*

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x - y^4 = 4$.

b) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $2m^2+m=3n^2+n$ thì $2m+2n+1$ là số chính phương.

Lời giải

a) $p^x - y^4 = 4$ (1), ta có $(1) \Leftrightarrow p^x = y^4+4y^2+4-(2y)^2$

$\Leftrightarrow p^x = (y^2-2y+2)(y^2+2y+2)$ (2)

Nếu $y=1 \Rightarrow p^x=5 \Rightarrow p=5, x=1$

Nếu $y \geq 2$ và $x=1$ thay vào (2) ta có $p=(y^2-2y+2)(y^2+2y+2)$ (loại, vì $y^2+2y+2>y^2-2y+2=y(y-2)+2 \geq 2$)

Nếu $y \geq 2$ và $x \geq 2$, kết hợp với (2) suy ra $\begin{cases} y^2-2y+2 \vdots p \\ y^2+2y+2 \vdots p \end{cases} \Rightarrow 4y \vdots p$

$\Rightarrow 4 \vdots p$ hoặc $y \vdots p$

TH1: $4 \vdots p \Rightarrow p=2$

TH2: $y \vdots p$, kết hợp với $y^2+2y+2 \vdots p$ suy ra $2 \vdots p \Rightarrow p=2$

Thay $p=2$ vào (1) ta có $2^x = y^4 + 4$ (3)

Vì $y \geq 2$ nên từ (3) $\Rightarrow 2^x \geq 2^4 + 4 = 20 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow 2^x \vdots 8$

Từ (3) $\Rightarrow y^4$ chẵn $\Rightarrow y^4 \vdots 8 \Rightarrow y^4 + 4$ chia cho 8 dư 4. Suy ra phương trình (3) vô nghiệm.

Vậy $(x, y, p) = (1; 1; 5)$

b) Ta có $2m^2 + m = 3n^2 + n \Leftrightarrow 2(m^2 - n^2) + m - n = n^2 \Leftrightarrow (m-n)(2m+2n+1) = n^2$ (1)

Gọi $d = (m-n, 2m+2n+1) \Rightarrow \begin{cases} m-n \vdots d \\ 2m+2n+1 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow (2m+2n+1) - 2(m-n) = (4n+1) \vdots d$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow n^2 \vdots d^2 \Rightarrow n \vdots d$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (m-n, 2m+2n+1) = 1$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $m-n$ và $2m+2n+1$ đều là số chính phương, ta có đpcm.

Câu 19. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2020-2021)*

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y - xy - 2x^2 + 5x = 4$.

Lời giải

Phương trình ban đầu tương đương với $xy(x-1) = 2x^2 - 5x + 4$

$\Rightarrow y(x-1) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x} = 2x - 5 + \frac{4}{x}$ $(do\ x \neq 0)$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{\pm1; \pm2; \pm4\}$

Lập bảng các giá trị

x	-1	1	-2	2	-4	4
y	$\frac{11}{2}$	$\bar{\exists} y$	$\frac{11}{3}$	1	$\frac{14}{5}$	$\frac{4}{3}$

Mà $x, y \in \mathbb{Z}$ nên nghiệm của phương trình là $(x; y) = (2; 1)$

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2x^2 - 8x + 62 = (x-1)y^2 + (x^2 - 6x + 5)y.$$

Lời giải

Với x, y nguyên dương, ta có

$$2x^2 - 8x + 62 = (x-1)y^2 + (x^2 - 6x + 5)y$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2 + (y-4)x - (y-3)\right] = 56$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3) = 56.$$

Nhận thấy $(x-1)+(y-2)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại $56=1.7.8=7.1.8.$

Xét các trường hợp xảy ra, ta được nghiệm nguyên dương của phương trình là $(2;9),(8;3).$

Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2020-2021)*

a) Cho $P=2.6^{2n}+6^n-3$. Chứng minh rằng P chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên n.

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2-4=0$.

Lời giải

a) Ta có $6^n-1=(6-1)(6^{n-1}+6^{n-2}+...+1)\vdots 5 \Rightarrow 6^n=5k+1, k\in\mathbb{N}$

Khi đó $P=2.6^{2n}+6^n-3=2(5k+1)^2+5k+1-3=50k^2+25k\vdots 25$

b) Ta có $4x^2-4xy+4y^2=16 \Leftrightarrow (2x-y)^2+3y^2=16 \Leftrightarrow (2x-y)^2=16-3y^2$

Vì $(2x-y)^2\geq 0$ nên $16-3y^2\geq 0 \Rightarrow y^2\leq 5 \Rightarrow y^2\in\{0;1;4\}$

Nếu $y^2=0$ thì $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Nếu $y^2=1$ thì $(2x-y)^2=13$ không là số chính phương nên loại $y^2=1$

Nếu $y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm 2$

+ Khi $y=2$ thì $x=0$ hoặc $x=2$

+ Khi $y=-2$ thì $x=0$ hoặc $x=-2$

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên là $S=\{(-2;0);(2;0);(0;2);(2;2);(0;-2);(-2;-2)\}$

Câu 22. *(Trường chuyên Điện Biên năm 2020-2021)*

Cho n là số nguyên dương. Biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ là hai số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 40.

Lời giải

Đặt $2n+1=x^2 \Rightarrow x$ lẻ $\Rightarrow 2n=(x-1)(x+1)\vdots 4$ vì $x-1;\ x+1$ chẵn $\Rightarrow n$ chẵn

Đặt $3n+1=y^2 \Rightarrow y$ lẻ (do n chẵn) và $3n=(y-1)(y+1)\vdots 8$ vì $y-1;\ y+1$ là hai số chẵn liên tiếp mà $(3;8)=1 \Rightarrow n\vdots 8$ (1).

Ta có một số chính phương chia cho 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4.

Mặt khác $x^2+y^2=5n+2 \Rightarrow x^2, y^2$ chia cho 5 dư 1

Nên $n=(3n+1)-(2n+1)=(y^2-x^2)\vdots 5$ (2).

Từ (1), (2) và $(5;8)=1 \Rightarrow n\vdots 40$. Đpcm.

Câu 23. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn: $xy^2+y^2-x^2+xy-2x+y=0$

Lời giải

$xy^2+y^2-x^2+xy-2x+y=0 \Leftrightarrow (x+1)y^2+y(x+1)-(x+1)^2=-1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=1 \\ y^2+y-x-1=-1 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} x+1=-1 \\ y^2+y-x-1=1 \end{cases} (II) \end{array}\right.$$

Giải (I) được các nghiệm $(0;0);(0;-1)$

Giải (II) được các nghiệm $(-2;0);(-2;-1)$

Câu 24. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam bị năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $2^x - y^2 + 4y + 61 = 0$.

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2^x + 65 = (y-2)^2$.

Vì 65 chia hết cho 5 và 2^x không chia hết cho 5 với mọi x nguyên dương nên nếu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn phương trình (1) thì $y-2$ là số nguyên không chia hết cho 5. Suy ra $(y-2)^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$.

Do đó $2^x \equiv \pm 1 \pmod 5$, suy ra $x = 2k$, với k là số nguyên dương.

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$2^{2k} + 65 = (y-2)^2 \Leftrightarrow 65 = (y-2+2^k).(y-2-2^k) \qquad (2)$$

Vì $k;y$ nguyên dương nên $y-2+2^k > 0$, từ (2) suy ra $y-2-2^k > 0$ và $y-2+2^k > y-2-2^k$. Do đó

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-2+2^k = 65 \\ y-2-2^k = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y-2+2^k = 13 \\ y-2-2^k = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=5 \\ y=35 \end{cases} \\ \begin{cases} k=2 \\ y=11 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=10 \\ y=35 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=11 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương là $(10;35)$ và $(4;11)$

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Yên Bái năm 2020-2021)*

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + 2n + 8$ là số chính phương.

2. Cho biểu thức $P = ab(a+b) + 2$, với a,b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức P chia hết cho 3 thì $a-b$ chia hết cho 3.

Lời giải

1) Đặt $n^2 + 2n + 8 = k^2$ $(k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1) = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} k+n+1=7 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ n=2 \end{cases}$

Với $n=2$ ta có $A = 16 = 4^2$ là số chính phương.

2) Ta có $ab(a+b)+2$ chia hết cho 3, suy ra $ab(a+b)$ chia cho 3 dư 1.

Suy ra hai số a,b không chia hết cho 3 và phải có cùng số dư khi chia cho 3.

Giả sử a,b đều chia cho 3 dư 1 thì $ab\left(a+b\right)$ chia cho 3 dư 2 (trái giả thiết) .

Suy ra a,b đều chia cho 3 dư 2. Vậy $a-b$ chia hết cho 3.

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(x+y)^2-y+1=0$.

Lời giải

Nhân $4x$ vào hai vế của phương trình ta được

$4x^2(x+y)^2-4xy+4x=0 \Leftrightarrow 4\left(x^2+xy\right)^2-4\left(x^2+xy\right)+4x^2+4x=0$

$\Leftrightarrow \left(2x^2+2xy-1\right)^2+4x^2+4x-1=0$

Suy ra $4x^2+4x-1\le 0 \Rightarrow (2x+1)^2\le 2$. Do $(2x+1)^2$ là số chính phương lẻ nên $(2x+1)^2=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Với $x=0$, thay vào phương trình ta được $-y+1=0 \Leftrightarrow y=1$.

Với $x=-1$, thay vào phương trình ta được $-(-1+y)^2-y+1=0 \Leftrightarrow -y^2+y=0 \Leftrightarrow y=0; y=1$.

Vậy có 3 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là $(0;1),(-1;0),(-1;1)$

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2x^2-8x+62=(x-1)y^2+\left(x^2-6x+5\right)y.$$

Lời giải

Với x,y nguyên dương, ta có

$2x^2-8x+62=(x-1)y^2+\left(x^2-6x+5\right)y$

$\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$

Nhận thấy $(x-1)+(y-2)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại $56=1.7.8=7.1.8.$

Xét các trường hợp xảy ra, ta được nghiệm nguyên dương của phương trình là $(2;9),(8;3)$.

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các số nguyên dương x,y,z là nghiệm của phương trình

$x^3\left(y^3+z^3\right)=2020\left(xyz+2\right)$, biết rằng $x>1$ và $y+z$ chia hết cho 101.

Lời giải

Vì $2^3.5.101=x^3\left(y^3+z^3\right)-2020xyz=x\left(x^2\left(y^3+z^3\right)-2020yz\right)$ nên x không có ước số nguyên tố nào ngoài các số có thể là $2;5;101$.

Vì $2020=2^2.5.101$ nên ta có các lập luận sau:

- Nếu $x \vdots 5$ (hoặc $x \vdots 101$) thì $x^3 \vdots 5^3$ (hoặc $x^3 \vdots 101^3$) nhưng $2020(xyz+2) \not\vdots 5^3$ (hoặc $2020(xyz+2) \not\vdots 101^3$).
- Nếu $x = 2^2$ thì $x^3 \vdots 2^6$ nhưng $2020(xyz+2) = 2^3.5.101(2yz+1) \not\vdots 2^6$

Từ những lập luận trên, ta suy ra $x = 1$ (loại) hoặc $x = 2$.

Khi $x = 2$ ta được phương trình $y^3 + z^3 = 5.101(yz+1)$ (*).

Đặt $y + z = 101k$, k là số nguyên dương sẽ tìm sau.

Từ $y^3 + z^3 = (y+z)\left[(y-z)^2 + yz\right]$ ta được

$5.101(yz+1) = 101k\left[(y-z)^2 + yz\right] \Leftrightarrow k(y-z)^2 + (k-5)yz = 5$ (**).

Từ trên ta suy ra $(k-5)yz \le 5$, do đó $k \le 5$. Thật vậy, nếu $k > 5 \Rightarrow 1 \le (k-5)yz \le 5 \Rightarrow y,z \le 5 \Rightarrow y+z < 101$ (mâu thuẫn).

Ta xét các trường hợp: $0 < k \le 5$.

Từ (*) ta suy ra được $y^3 + z^3 \vdots 5$, ta suy ra $y + z \vdots 5$

Nếu y,z cùng chia hết cho 5 thì $y^3 + z^3 \vdots 5^3$

trong khi đó $5.101(yz+1) = 5.101.yz + 5.101 \not\vdots\ 5^3$.

Do đó cả hai y,z đều không chia hết cho 5.

Ta có $k(y-z)^2 + (k-5)yz = 5 \Leftrightarrow -3kyz = -k(y+z)^2 + 5yz + 5$

Vì $y \not\vdots 5$, $z \not\vdots 5$ nên $k \vdots 5$.

Với $k = 5$, thay vào (**) ta được $5(y-z)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-z=1 \\ y-z=-1 \end{array}\right.$.

Ta được các hệ phương trình $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-z=1 \\ y+z=505 \end{cases} \\ \begin{cases} y-z=-1 \\ y+z=505 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=253 \\ z=252 \end{cases} \\ \begin{cases} y=252 \\ z=253 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $(x;y;z)$ là:

$$(2;252;253),(2;253;252)$$

Câu 30. *(Trường chuyên Quảng Ngãi năm 2020-2021)*

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 - n - 5$ là số chính phương.

2. Ta nhận thấy số 2025 thỏa mãn tính chất rất đẹp: $2025=\left(20+25\right)^{2}$. Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$ cũng thỏa mãn tính chất trên, nghĩa là $\overline{abcd}=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^{2}$.

Lời giải

1) Số n^2-n-5 chính phương $\Leftrightarrow 4n^2-4n-20=k^2$, với $k\in\mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow \left(2n-1\right)^2-k^2=21 \Leftrightarrow \left(2n+k-1\right)\left(2n-k-1\right)=21$.

Vì $\left(2n+k-1\right)>\left(2n-k-1\right)>0$ nên có các trường hợp sau

$\Leftrightarrow \begin{cases}2n+k-1=21\\ 2n-k-1=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2n+k-1=7\\ 2n-k-1=3\end{cases}$.

Tìm được $n=3, n=6$.

2) Giả sử $\overline{abcd}$ là số thỏa tính chất trên, $\overline{abcd}=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2$.

Đặt $x=\overline{ab}, y=\overline{cd}$, ta có $10\le x\le 99$, $0\le y\le 99$. khi đó $\overline{abcd}=100\cdot\overline{ab}+\overline{cd}=100x+y$

Do đó, ta có $100x+y=\left(x+y\right)^2$

suy ra $10<x+y<100$

$\Leftrightarrow 99x=\left(x+y\right)^2-(x+y)=\left(x+y\right)\left(x+y-1\right)$

Vì vế phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp có hai chữ số nên $99x$ phải được phân tích ở dạng đó.

Ta biết các bội của 11 có hai chữ số gồm $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ bội của 9 có hai chữ số gồm $\{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$

Như vậy x chỉ có thể là các số sau {98, 20, 30}.

Kiểm tra trực tiếp ta thấy các số 9801, 2025, 3025 thỏa tính chất của đề bài.

Câu 31. *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2020-2021)*

1) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{z+2\sqrt{2}}$$

2) Tìm tất cả các số tự nhiên a để $a-2; 4a^2-16a+17; 6a^2-24a+25$ đều là các số nguyên tố.

Lời giải

1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{z+2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy}=z-x-y+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4xy=(z-x-y)^2+8+4\sqrt{2}(z-x-y)$

+ Nếu $z-x-y\ne 0$ thì vế phải là số vô tỉ, vế trái là số nguyên dương. Vô lí.

+ Nếu $z-x-y=0 \Rightarrow \begin{cases}z-x-y=0\\ 4xy=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x+y\\ xy=2\end{cases}$

Vì x, y là các số nguyên dương nên $x=1; y=2$ hoặc $x=2; y=1 \Rightarrow z=3$.

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là $(1;2;3),(2;1;3)$.

2) Đặt $a-2=p$ (p là số nguyên tố)

$\Rightarrow 4a^2-16a+17=4(a^2-4a+4)+1=4p^2+1$

$\Rightarrow 6a^2-24a+25=6(a-2)^2+1=6p^2+1$

Do p là số nguyên tố nên $4p^2+1>5$ và $6p^2+1>5$

Ta có $4p^2+1=5p^2-(p-1)(p+1)$ và $6p^2+1=5p^2+5+(p+2)(p-2)$

+ Xét trường hợp $p \vdots 5$

Mà p là số nguyên tố nên $p=5 \Rightarrow a=7$

Thử lại với $a=7$ thì $a-2=5;\ 4a^2-16a+17=101; 6a^2-24a+25=151$ là các số nguyên tố.

+ Xét trường hợp p không chia hết cho 5, ta có các trường hợp sau:

- Nếu p chia 5 dư 1 hoặc 4 thì $(p-1)(p+1) \vdots 5 \Rightarrow 4p^2+1 \vdots 5$

$\Rightarrow 4p^2+1$ không là số nguyên tố

- Nếu p chia cho 5 dư 2 hoặc 3 thì $(p-2)(p+2) \vdots 5 \Rightarrow 6p^2+1 \vdots 5$

$\Rightarrow 6p^2+1$ không là số nguyên tố

Vậy a = 7 là giá trị cần tìm.

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2020-2021)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $y^2+2y=4x^2y+8x+7$.

b) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a,b) thỏa mãn $b^2+3a \vdots a^2b$.

Lời giải

a) Phương trình đa cho tương đương với : $y^2-2(2x^2-1)y-8x-7=0$.

Chúng ta xem đây là phương trình bậc hai đối với biến y. Do đó, để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

Ta có: $\Delta=4(x^4-x^2+2x+2)=4(x+1)^2\left[(x-1)^2+1\right]$

- Nếu $x=-1$. Thay vào phương trình ta được: $y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow y=1$.

  Do đó $(x;y)=(-1;1)$ là một nghiệm của phương trình.

- Nếu $x\neq -1$. Khi đó, để Δ là số chính phương thì phải tồn tại số $a\in\mathbb{Z}^*$ sao cho:

$$(x-1)^2+1=a^2 \Leftrightarrow a^2-(x-1)^2=1 \Leftrightarrow (a-x+1)(a+x-1)=1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x+1=1\\a+x-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}a-x+1=-1\\a+x-1=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\x=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\x=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $x=1$, thay vào phương trình ta được: $y^2-2y-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=5\\y=-3\end{array}\right.$

Thử lại, ta thấy các nghiệm $(1;5),(1;-3)$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(x;y)=(-1;1),(1;5),(1;-3)$

b) Do $b^2+3a\,\vdots\,a^2b$ nên tồn tại số nguyên dương k sao cho: $b^2+3a=ka^2b$ hay $b^2=ka^2b-3a=a(kab-3)$ nên $b^2\,\vdots\,a$.

Hơn nữa, do $3a=ka^2b-b^2=b(ka^2-b)$ nên $3a\,\vdots\,b$.

Do đó, các số $\frac{b^2}{a};\frac{3a}{b}$ và $\frac{b^2+3a}{a^2b}=\frac{b}{a^2}+\frac{3}{ab}$ là các số nguyên dương.

Ta có: $\frac{3a}{b}.\left(\frac{b}{a^2}+\frac{3}{ab}\right)=\frac{3}{a}+\frac{9}{b^2}$ là một số nguyên dương nên $a\left(\frac{3}{a}+\frac{9}{b^2}\right)=3+\frac{9a}{b^2}$ là một số nguyên dương hay $\frac{9a}{b^2}$ là một số nguyên dương; do đó $9a\,\vdots\,b^2$.

Khi đó, tồn tại hai số nguyên dương m,n sao cho: $\begin{cases}b^2m=9a\\an=b^2\end{cases}$.

Từ đó, suy ra $mn=9$. Do đó, $n\in\{1,3,9\}$ nên $b^2\in\{a,3a,9a\}$. Khi đó, điều kiện ban đầu của bài toán trở thành: $na+3a\,\vdots\,a^2b\Leftrightarrow n+3\,\vdots\,ab$

Ta xét ba khả năng có thể có của n như sau:

- Nếu $n=1$ thì $\begin{cases}b^2=a\\4\,\vdots\,ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=a\\4\,\vdots\,b^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$
- Nếu $n=3$ thì $\begin{cases}b^2=3a\\6\,\vdots\,ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=a\\18\,\vdots\,b^3\end{cases}$. Do b là bội của 3 nên không tồn tại $(a;b)$.
- Nếu $n=9$ thì $\begin{cases}b^2=9a\\12\,\vdots\,ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=a\\108\,\vdots\,b^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$

Vậy có hai cặp số thỏa yêu cầu bài toán là $(1;1),(1;3)$.

Câu 33. *(Trường chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm 2020-2021)*

1. Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $xy^2-(x-2)(x^4+2x+1)=2y^2$.
2. Chứng minh rằng nếu $2^n=10a+b$ (với a, b, n là các số tự nhiên thỏa mãn $0<b<10$, $n>3$) thì ab chia hết cho 6.

Lời giải

1. $xy^2-(x-2)(x^4+2x+1)=2y^2\Leftrightarrow(x-2)(x^4+2x+1-y^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^4+2x+1=y^2\end{array}\right.$

TH1: $x=2$ thì mọi giá trị $y\in\mathbb{Z}$ đều thỏa mãn.

TH2: $x>2$, ta có $x^4<x^4+2x+1=y^2<x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2$, mà x là số nguyên nên x^4 và $\left(x^2+1\right)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. Suy ra không tồn tại số nguyên y thỏa mãn.

TH3: $x\le -2$, ta có $x^4>x^4+2x+1=y^2>x^4-2x^2+1=\left(x^2-1\right)^2$, mà x là số nguyên nên x^4 và $\left(x^2-1\right)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. Suy ra không tồn tại số nguyên y thỏa mãn.

TH4: $x=-1\Rightarrow y^2=0\Rightarrow y=0$.

TH5: $x=0\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm 1$.

TH6: $x=1\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y=\pm 2$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là $(-1;0)$, $(0;\pm 1)$, $(1;\pm 2)$ và $\left\{(2;y)/\,y\in\mathbb{Z}\right\}$

2. Vì $2^n=10a+b$ mà $0<b<10$ nên 2^n có tận cùng là b.

Đặt $n=4k+r$ (với k, r là các số tự nhiên thỏa mãn $0\le r\le 3$), khi đó $2^n=2^{4k+r}=16^k.2^r$

TH1: $r=0\Rightarrow 2^n=16^k$ có tận cùng là 6, suy ra $b=6\Rightarrow ab\,\vdots\,6$ (1).

TH2: $1\le r\le 3$ thì $2^n-2^r=2^r\left(16^k-1\right)$ có tận cùng bằng 0 (vì 16^k-1 có tận cùng bằng 5). Suy ra 2^n có tận cùng là 2^r , hay $b=2^r$. Khi đó

$10a=2^n-b=2^n-2^r=2^r\left(16^k-1\right)\vdots(16-1)\Rightarrow 10a\,\vdots\,3\Rightarrow a\,\vdots\,3\Rightarrow ab\,\vdots\,6$ (2)

Từ (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.

Câu 34. *(Trường chuyên tin tỉnh Vĩnh Phúc năm 2020-2021)*

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p^2+3p+4$ cũng là số nguyên tố.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a!+b!+c!=d!$.

Cho biết kí hiệu $n!$ là tích các số tự nhiên từ 1 đến n.

Lời giải

a) Nếu $p\,\vdots\,3\Rightarrow p=3$ thì $2p^2+3p+4=31$ là số nguyên tố suy ra $p=3$ thỏa mãn.

Nếu $p=3k+1,k\in\mathbb{N}$ thì $2p^2+3p+4=2(3k+1)^2+3(3k+1)+4=18k^2+21k+9\,\vdots\,3$, kết hợp với $2p^2+3p+4>3$ suy ra $2p^2+3p+4$ không là số nguyên tố.

Nếu $p=3k+2,k\in\mathbb{N}$ thì $2p^2+3p+4=2(3k+2)^2+3(3k+2)+4=18k^2+33k+18\,\vdots\,3$, kết hợp với $2p^2+3p+4>3$ suy ra $2p^2+3p+4$ không là số nguyên tố.

b) Giả sử $a\le b\le c$, kết hợp với giả thiết ta được $1\le a\le b\le c<d$.

*) Nếu $a<b\Rightarrow a!+a!(a+1)...b+a!(a+1)...c=a!(a+1)...d$

$\Rightarrow 1+(a+1)...b+(a+1)...c=(a+1)...d\Rightarrow 1\,\vdots\,a+1$ vô lí.

*) Nếu $a=b$ thì $2a!+c!=d!$

+) Nếu $a=b<c$ thì từ phương trình trên ta được:

$2a!+a!(a+1)...c=a!(a+1)...d\Leftrightarrow 2+(a+1)...c=(a+1)...d$

Từ phương trình này ta được: $2\,\vdots\,a+1\Rightarrow a=1$

Với $a=1\Rightarrow b=1$, ta được phương trình $2+c!=d!$

+ Nếu $c>2\Rightarrow c!\vdots 3, d!\vdots 3\Rightarrow 2\vdots 3$ vô lí.

+ Nếu $c=2\Rightarrow 4=d!$ vô lí.

+) Nếu $a=b=c$ thì từ phương trình đã cho ta được:

$$3.a!=d!\Rightarrow 3=(a+1)...d\Rightarrow 3\vdots a+1\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ d=3 \end{cases}$$

Vậy $(a,b,c,d)=(2,2,2,3)$.

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho n^2+2022 là số chính phương.

Lời giải

Đặt $n^2+2022=y^2$ với y là số nguyên khác 0.

$n^2+2022=y^2 \Leftrightarrow (y-n)(y+n)=2022$.

Có $(y-n)+(y+n)=2y$ là số chẵn nên $(y-n)$ và $(y+n)$ cùng tính chẵn lẻ

Nếu $(y-n)$ là số lẻ thì $(y+n)$ cũng lẻ $\Rightarrow (y-n)(y+n)$ là số lẻ

$\Rightarrow (y-n)(y+n)\neq 2022$.

Nếu $(y-n)$ là số chẵn thì $(y+n)$ cũng chẵn $\Rightarrow (y-n)(y+n)\vdots 4\Rightarrow 2022\vdots 4$ (vô lý)

Vậy không tồn tại n thỏa mãn bài toán.

Câu 36. *(Trường chuyên tp Hồ Chí Minh năm 2020-2021)*

Tìm tất cả các số nguyên dương x,y thỏa mãn phương trình $3^x-y^3=1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $y^3=3^x-1$, suy ra y^3 chia 3 dư 2, do đó y chia 3 dư 2.

Như vậy $y=3n+2$ với $n\in\mathbb{N}$. Khi đó:

$$3^x=y^3+1=(y+1)(y^2-y+1)=(3n+2+1)\left[(3n+2)^2-(3n+2)+1\right]=9(n+1)(3n^2+3n+1).$$

Ta thấy rằng số nguyên dương $(3n^2+3n+1)$ là ước của 3^x nhưng lại không chia hết cho 3, do đó $3n^2+3n+1=1$, tức là $n=0$. Vậy $y=2, x=2$.

Cách 2: Ta có $3^x=y^3+1=(y+1)(y^2-y+1)$. Do đó, tồn tại các số tự nhiên u,v sao cho

$$\begin{cases} y+1=3^u \\ y^2-y+1=3^v \end{cases}.$$

Vì $y+1>1$ nên $3^u>1$ hay $u\geq 1$. Rút $y=3^u-1$, thay vào phương trình dưới, ta có

$$(3^u-1)^2-(3^u-1)+1=3^v \text{ hay}$$

$$3^{2u}-3\cdot 3^u+3=3^v \Leftrightarrow 3^{2u-1}-3^u+1=3^{v-1}.$$

Vì vế phải nguyên nên ta phải có $v-1\geq 0$ hay $v\geq 1$. Tuy nhiên, nếu $v-1>0$ thì 3^{v-1} chia hết cho 3, trong khi vế trái không chia hết cho 3, vô lý. Do đó, $v=1$ hay

$$y^2-y+1=3\Leftrightarrow y^2-y=2.$$

Giải ra được $y=2$. Thay vào đề bài, ta được $3^x=y^3+1=9$ nên $x=2$.

Vậy nên tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $(x,y)=(2;2)$.

Câu 37. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2020-2021)*

Phân tích số 210720202021 thành tổng của k số tự nhiên $a_1;a_2;....;a_k$.

Đặt $S=a_1^5+a_2^5+...+a_k^5$. Tìm chữ số tận cùng của S.

Lời giải

Với $n\in\mathbb{N}$ ta có $\left(n^5-n\right)\vdots 10$

Thật vậy $\left(n^5-n\right)=\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)\vdots 2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\left(n^5-n\right)=\left[\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n-2\right)\left(n+2\right)+5n\left(n^2-1\right)\right]\vdots 5\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\left(n^5-n\right)\vdots 10\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Suy ra $\left(a_i^5-a_i\right)\vdots 10\quad \left(i=1;2;....,k\right)$.

$\Rightarrow\left[\left(a_1^5+a_2^5+...+a_k^5\right)-\left(a_1+a_2+...+a_k\right)\right]\vdots 10$

$\Rightarrow\left(S-210720202021\right)\vdots 10$. Vậy S có số tận cùng là 1

Câu 38. *(Trường chuyên Phú Thọ năm 2020-2021)*

Tìm các số nguyên *x,y* thỏa mãn $\sqrt{9x^2+16x+96}+16y=3x-24$

Lời giải

Ta có $\sqrt{9x^2+16x+96}+16y=3x-24\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+16x+96}=3x-16y-24$

Đặt $3x-16y-24=a$ với $a\in N^*$. Khi đó $9x^2+16x+96=a^2$

$\Leftrightarrow 81x^2+144x+864=9a^2\Leftrightarrow(9x+8)^2-(3a)^2=-800$

$\Leftrightarrow(9x+8-3a)(9x+8+3a)=-800$ (*)

Thay $a=3x-16y-24$ vào (*)

$\Rightarrow(9x-24y-32)(3y+5)=-25$

$\Rightarrow 25\vdots(3y+5)$ mà $3y+5$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow 3y+5\in\{-1;5;-25\}$

- Với $3y+5=-1\Leftrightarrow y=-2\Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn)
- Với $3y+5=5\Leftrightarrow y=0\Rightarrow x=3$ (Loại vì a<0)
- Với $3y+5=-25\Leftrightarrow y=-10\Rightarrow x=-23$ (Thỏa mãn)

Vậy $(x,y)=(1;-2),(-23;-10)$

Chuyên đề 9

CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP VÀ LOGIC

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2020-2021)*

Trong mặt phẳng cho 2020 điểm phân biệt sao cho từ ba điểm bất kỳ luôn chọn ra được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1cm. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1cm chứa không ít hơn 1010 điểm trong 2020 điểm đã cho.

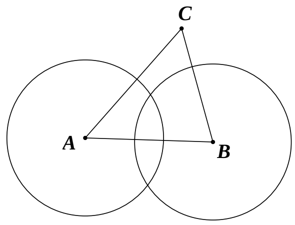
Lời giải

Gọi A là một điểm bất kỳ trong số 2020 điểm đã cho.

Xét hình tròn $(A;1\text{cm})$.

Trường hợp 1: Nếu hình tròn $(A;1\text{cm})$ chứa tất cả 2019 điểm còn lại thì ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: Nếu trong 2019 điểm còn lại tồn tại điểm B nằm ngoài hình tròn $(A;1\text{cm})$ thì $AB > 1\text{cm}$, vẽ đường tròn $(B;1\text{cm})$. Ta chứng minh 2018 điểm còn lại hoặc thuộc hình tròn $(A;1\text{cm})$ hoặc thuộc hình tròn $(B;1\text{cm})$.



Thật vậy: Giả sử tồn tại điểm C trong 2018 điểm còn lại nằm ngoài cả hai hình tròn $(A;1\text{cm})$ và $(B;1\text{cm})$ như hình vẽ. Khi đó $AC > 1\text{cm}$ và $BC > 1\text{cm}$. Như vậy với ba điểm A, B, C thì khoảng cách của hai điểm bất kỳ luôn lớn hơn 1(mâu thuẫn với đầu bài).

Vậy 2018 điểm còn lại hoặc thuộc hình tròn $(A;1\text{cm})$ hoặc thuộc hình tròn $(B;1\text{cm})$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một hình tròn chứa ít nhất 1009 điểm đã cho và chứa thêm điểm A hoặc điểm B.

Vậy tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1cm chứa không ít hơn 1010 điểm đã cho.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2020-2021)*

Một bảng có kích thước $2n\times 2n$ ô vuông, là số nguyên dương. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

Lời giải

Ta chọn ra n hàng chứa số ô được đánh dấu nhiều nhất. Ta sẽ chứng minh trong n hàng còn lại, số ô được đánh dấu không quá n

Giả sử ngược lại, tức là ở n hàng còn lại, có nhiều hơn n ô được đánh dấu hay là có ít nhất 1 hàng trong n hàng không được chọn ra này có chứa nhiều hơn 2 ô được đánh dấu.(1)

Mặt khác, vì tổng số ô được đánh dấu trong các hàng được chọn ra nhiều hơn n nên tổng số ô được đánh dấu nhỏ hơn $2n$

1 hàng trong các hàng được chọn ra chứa ít hơn 2 ô được đánh dấu. (2)

Từ (1) và (2) suy ra mâu thuẫn.

Suy ra số ô được đánh dấu trong n hàng còn lại không vượt quá n ô.Nên, ta có thể chọn ra n cột chứa n ô này.

n cột và n hàng được chọn ra là ta cần tìm.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Lạng Sơn năm 2020-2021)*

Bên trong hình chữ nhật có chiều dài $101cm$ và chiều rộng $20cm$ cho 10101điểm. Vẽ 10101 hình tròn có tâm lần lượt là 10101 điểm đã cho và bán kính đều bằng $\sqrt{2}\,cm$. Hỏi có hay không 6 điểm thuộc vào phần chung của 6 hình tròn nhận 6 điểm ấy làm tâm? Tại sao?

Lời giải

Chia hình chữ nhật thành $101.20 = 2020$ hình vuông cạnh $1cm$. Do có 10101 điểm chứa trong 2020 hình vuông nên theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất một hình vuông chứa không ít hơn 6 điểm $(10101 = 5.2020 + 1)$.

Khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong hình vuông đơn vị không vượt quá đường chéo của nó tức là không lớn hơn $\sqrt{2}\,cm$.

Gọi $O_1;O_2;O_3;O_4;O_5;O_6$ là sáu điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó, nó có thể nằm trên cạnh hình vuông. Với sáu đường tròn tâm $O_1;O_2;O_3;O_4;O_5;O_6$ bán kính bằng $\sqrt{2}\,cm$ chắc chắn sáu điểm $O_1;O_2;O_3;O_4;O_5;O_6$ đều nằm trong sáu đường tròn này nghĩa là nằm trong phần chung của sáu hình tròn có tâm là các điểm $O_1;O_2;O_3;O_4;O_5;O_6$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2020-2021)*

a) Ban đầu có 2020 viên sỏi để trong 1 chiếc túi. Có thể thực hiện công việc như sau:

Bước 1: Bỏ đi 1 viên sỏi và chia túi này thành 2 túi mới.

Bước 2: Chọn 1 trong hai túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 3 túi.

Bước 3: Chọn 1 trong 3 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 4 túi.

Tiếp tục quá trình trên. Hỏi sau 1 số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng hai viên sỏi hay không?

Lời giải

Sau mỗi bước số sỏi giảm đi 1 và số túi tăng lên 1 suy ra tổng số sỏi và số túi không thay đổi sau mỗi bước.Tổng này là 2021.

Giả sử sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi, khi đó tổng số tỏi và số túi phải chia hết ho 3.

Do 2021 không chia hết cho 3 nên mâu thuẫn suy ra điều giả sử là sai.

Vậy không thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi sau một số bước.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2020-2021)*

Cho X là một tập hợp gồm 506 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2020. Chứng minh trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x-y$ thuộc tập hợp $E=\{5;10;15\}$.

Lời giải

Ta chia các số nguyên từ 1 đến 2020 thành 101 nhóm:

$\{1;2;\ldots;20\};\{21;22;\ldots;40\};\ldots;\{1981;1982;\ldots;2000\};\{2001;2002;\ldots;2020\}$

Vì có 506 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm có chứa $\left[\dfrac{506}{101}\right]+1=6$ số trở lên.

Hiệu của hai số bất kỳ trong nhóm trên luôn lớn hơn 0, nhỏ hơn 20. Trong các số này luôn có 2 số có cùng số dư khi chia cho 5, nên hiệu 2 số này chia hết cho 5. Giả sử hai số này là $x, y; (x>y)$

Từ đó ta có $x-y\in\{5;10;15\}$ ta được điều phải chứng minh.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Bạn Chi được thưởng mỗi ngày ít nhất một chiếc kẹo, nhưng trong 7 ngày liên tiếp, tổng số kẹo Chi nhận được không quá 10 chiếc. Chứng minh trong một số ngày liên tiếp, tổng số kẹo Chi nhận được là 27 chiếc.

Lời giải

Xét 28 ngày liên tiếp từ ngày thứ nhất đến ngày thứ 28 mà Chi nhận được kẹo.

Gọi $T(n)$ là tổng số kẹo Chi nhận được đến ngày thứ n. Vì tổng số kẹo Chi nhận được trong 7 ngày liên tiếp không vượt quá 10 chiếc nên ta có: $1\le T(1)<T(2)<\ldots<T(28)\le 40$.

Xét 28 số nguyên dương phân biệt $T(1)$, $T(2),\ldots, T(28)$. Theo nguyên lý Đirichlet, tồn tại hai số $T(a)\equiv T(b)\pmod{27}$ với $1\le a<b\le 28$ hay $\left[T(b)-T(a)\right]\,\vdots\,27$.

Mặt khác ta có: $1\le T(b)-T(a)\le 39$ suy ra $T(b)-T(a)=27$.

Vậy từ ngày thứ $a+1$ đến ngày thứ b thì Chi nhận đúng 27 chiếc kẹo.

Câu 7. *(Trường chuyên tin Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho một bảng ô vuông có kích thước 2020×2020 (gồm 2020 hàng và 2020 cột). Người ta tô màu đen 3030 ô vuông bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra 1010 hàng và 1010 cột của bảng sao cho các ô được tô màu đen đều nằm trên 1010 hàng hoặc 1010 cột đã chọn.

Lời giải

Vì có 2020 cột nên ta có thể chọn ra 1010 cột có số ô được tô màu đen nhiều nhất. Khi có có hai khả năng xảy ra:

Khả năng 1: Trong 1010 cột đã chọn chứa hết 3030 ô màu đen, khi đó ta chọn 1010 hàng bất kì thì bài toán được giải quyết.

Khả năng 2: Trong 1010 cột đã chọn không chứa đủ 3030 ô màu đen.

Ta đi chứng minh số ô màu đen còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 1010. Khi đó, ta chỉ cần chọn ra 1010 hàng chứa các ô màu đen còn lại thì bài toán được chứng minh.

Thật vậy, giả sử số ô màu đen còn lại lớn hơn 1010 (hay tổng số ô đen trong 1010 cột đã chọn nhỏ hơn 2020). Theo nguyên lý Dirichlet, trong 1010 cột còn lại không được chọn, có ít nhất 1 cột chứa hai ô màu đen.

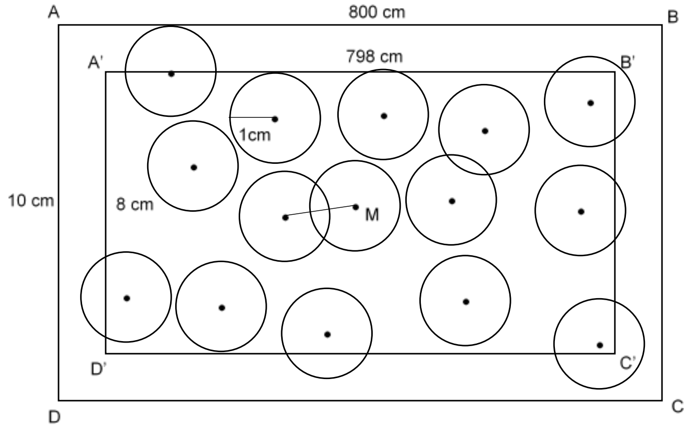
Mặt khác vì 1010 cột ta chọn chứa số ô màu đen nhiều nhất nên mỗi cột phải chứa ít nhất 2 ô đen. Suy ra tổng số ô đen trong 1010 cột đã chọn lớn hơn hoặc bằng 2020 (mâu thuẫn)

Vậy điều giả sử là sai. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Câu 8. *(Trường chuyên dự bị Nghệ An năm 2020-2021)*

Trong hình chữ nhật có chiều dài bằng 800 cm, chiều rộng bằng 10 cm cho 2020 điểm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 cm nằm trong hình chữ nhật mà không chứa điểm nào trong 2020 điểm đã cho.

Lời giải



Giả sử ABCD là hình chữ nhật có $AB = 800cm$, $BC = 10cm$; A'B'C'D' là hình chữ nhật có tâm trùng với tâm của hình chữ nhật ABCD sao cho $A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, C'D' \parallel CD, D'A' \parallel DA$ và $A'B' = 798cm$, $B'C' = 8cm$

Vẽ 2020 hình tròn bán kính bằng 1cm có tâm là các điểm ban đầu.

Gọi C_i là hình tròn của điểm thứ i, $i = \overline{1,2020}$ và S_i là diện tích của nó thì $S_i = \pi cm^2$, với $i = \overline{1,2020}$.

Ta có $\sum_{i=1}^{2020} S_i = 2020\pi = 2020.3,14 = 6342,8cm^2$

Mặt khác: $S_{A'B'C'D'} = 6384cm^2$

Từ $\sum_{i=1}^{2020} S_i < S_{A'B'C'D'}$ và mọi C_i nằm trọn trong ABCD nên tồn tại một điểm M nằm trong hình chữ nhật A'B'C'D' và không thuộc các hình tròn C_i đã cho với $1 \le i \le 2020$.

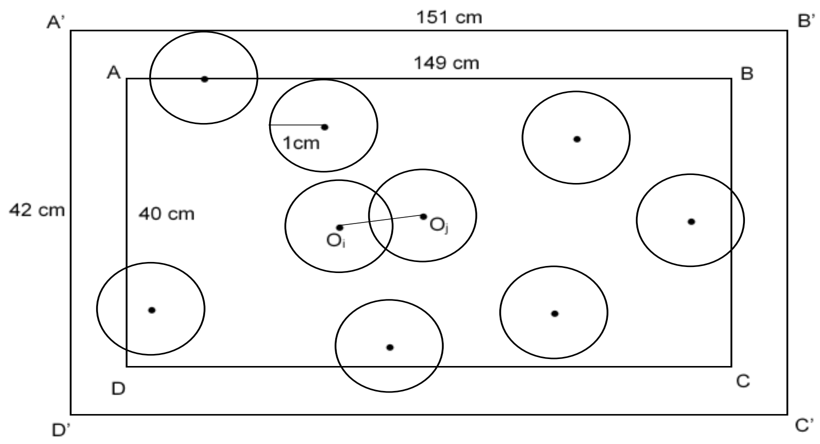
Gọi C là hình tròn tâm M bán kính bằng $1cm$, khi đó hình tròn C không chứa điểm nào trong 2020 điểm đã cho. Suy ra đpcm

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2020-2021)*

Trong hình chữ nhật có chiều dài bằng $149\,\text{cm}$, chiều rộng bằng $40\,\text{cm}$ cho 2020 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm trong số 2020 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $2\,\text{cm}$.

Lời giải

Giả sử ABCD là hình chữ nhật có $AB = 149cm$, $BC = 40cm$; A'B'C'D' là hình chữ nhật có tâm trùng với tâm của hình chữ nhật ABCD sao cho



$A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, C'D' \parallel CD, D'A' \parallel DA$ và $A'B' = 151cm$, $B'C' = 42cm$

Vẽ 2020 hình tròn bán kính bằng 1cm có tâm là các điểm ban đầu.

Gọi C_i là hình tròn của điểm thứ i, $i = \overline{1,2020}$ và S_i là diện tích của nó thì $S_i = \pi cm^2$, với $i = \overline{1,2020}$.

Ta có $\sum_{i=1}^{2020} S_i = 2020\pi > 2020.3,14 = 6342,8cm^2$

Mặt khác: $S_{A'B'C'D'} = 6342cm^2$

Từ $\sum_{i=1}^{2020} S_i > S_{A'B'C'D'}$ và mọi C_i nằm trọn trong A'B'C'D' nên tồn tại

$1 \le i \le 2020, 1 \le j \le 2020, i \ne j$ sao cho $C_i \cap C_j \ne \phi$.

Gọi O_i, O_j tương ứng là hai tâm của C_i và C_j (khi đó O_i, O_j thuộc vào tập hợp 2020 điểm đã cho). Ta có $O_iO_j < R_i + R_j = 2cm$ (trong đó $R_i = R_j = 1cm$ là bán kính của C_i và C_j). Suy ra đpcm

Câu 10. *(Trường chuyên Hải Phòng năm 2020-2021)*

Giả sử rằng A là tập hợp con của tập hợp $\{1;\ 2;\ 3;\ldots;\ 1023\}$ sao cho A không chứa hai số nào mà số này gấp đôi số kia. Hỏi A có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải

Chia các số từ 1 đến 1023 thành các tập con $A_0 = \{1\}, A_1 = \{2;3\}, A_2 = \{4;5;6;7\}$,

$A_3 = \{8;9;...;15\}, A_4 = \{16;17;...;31\}, A_5 = \{32;33;....;63\},$

$A_6 = \{64;65;...;127\}, A_7 = \{128;129;...;255\}, A_8 = \{256;257;...;511\}$

$A_9 = \{512;513;...;1023\}$

Dễ thấy số phần tử của tập A_k là $2^k, k = 0,1,...,9$.

Nhận thấy $n \in A_k \Leftrightarrow 2n \in A_{k+1}$.

Xét $A = A_9 \cup A_7 \cup A_5 \cup A_3 \cup A_1 \Rightarrow |A| = 512 + 128 + 32 + 8 + 2 = 682$, rõ ràng A không chứa số nào gấp đôi số khác.

Ta chỉ ra rằng không thể chọn tập con có nhiều hơn 682 số thỏa mãn bài ra.

Thật vậy: Giả sử tập A thỏa mãn yêu cầu bài toán và chứa a_k phần tử thuộc A_k, $k = 0,1,..,9$.

Xét các tập hợp A_k và A_{k+1}. Với $m \in A_k$ tùy ý, ta có $2m \in A_{k+1}$. Số các cặp $(m, 2m)$ như vậy là 2^k và trong mỗi cặp như vậy có nhiều nhất một số thuộc A.

Ngoài ra tập A_{k+1} còn chứa 2^k số lẻ, tức là có nhiều nhất $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ số thuộc A được lấy từ A_k và A_{k+1}.

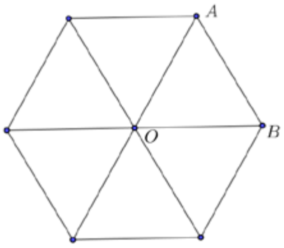
Suy ra $a_0 + a_1 \le 2^1, a_2 + a_3 \le 2^3, a_4 + a_5 \le 2^5, a_6 + a_7 \le 2^7, a_8 + a_9 \le 2^9$. Cộng các bất đẳng thức ta được $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9 \le 682$. Vậy số phần tử lớn nhất của A là 682.

Câu 11. *(Trường chuyên Yên Bái năm 2020-2021)*

Cho 25 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một lục giác đều cạnh $6cm$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong số các điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $3cm$.

Lời giải

+ Giả sử 25 điểm đã cho nằm trong hoặc nằm trên cạnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm O



+ Nối O với 6 đỉnh của lục giác tạo thành 6 tam giác đều. Khi đó sẽ có ít nhất 5 điểm nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều trong số 6 tam giác đó (theo nguyên lý Dirichlet)

+ Giả sử 5 điểm trong 25 điểm đó cùng nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác đều OAB.

+ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, OB, OA. Khi đó bốn tam giác AMP, BMN, ONP, MNP là các tam giác đều cạnh bằng $3cm$.

+ Năm điểm nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác OAB sẽ có ít nhất hai điểm nằm trong một trong hay nằm trên cạnh của một trong bốn tam giác đều trong số bốn tam giác trên (theo nguyên lý Dirchlet). Khoảng cách giữa hai điểm đó không quá $3cm$.

Câu 11. *(Trường chuyên Quảng Ngãi năm 2020-2021)*

Cho 16 số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2021, đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong 16 số trên có ít nhất một số là số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử 16 số đã cho gồm $a_1, a_2, \dots, a_{16}$ và tất cả chúng đều là hợp số.

Gọi p_i là ước nguyên tố nhỏ nhất của số a_i (với $i = 1, \dots, 16$).

Vì 16 số đã cho đôi một nguyên tố cùng nhau nên 16 số p_i là phân biệt.

Gọi $p_k = \underset{i=1,\dots,16}{\mathrm{Max}}\{p_i\}$, khi đó $p_k \ge 51$ vì nhỏ hơn 51 chỉ có 15 số nguyên tố

$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$.

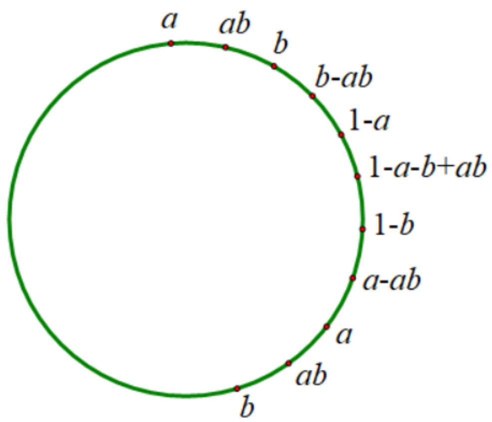
Mà p_k là ước nguyên tố nhỏ nhất của a_k nên $a_k \ge p_k \cdot p_k \ge 51^2 = 2601$, mâu thuẫn với $a_k < 2021$.

Vậy trong số các số đã cho phải có ít nhất một số là số nguyên tố.

Câu 12. *(Trường chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa năm 2020-2021)*

Trên một đường tròn người ta lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xem kẻ nhau. Tại mỗi điểm người ta ghi một số thực khác 0 và 1 sao cho quy tắc sau được thỏa mãn "số tại mỗi điểm màu xanh bằng tổng hai số ghi tại mỗi điểm màu đỏ kề nó, số ghi tại mỗi điểm màu đỏ bằng tích hai số ghi tại mỗi điểm màu xanh kề nó". Tính tổng 2024 số đó.

Lời giải



Theo chiều kim đồng hồ ta gọi a, b là hai số ghi tại hai điểm màu xanh liên tiếp nào đó trên đường tròng (a, b khác 0 và 1). Khi đó số ghi tại điểm màu đỏ nằm giữa hai điểm màu xanh nói trên là ab. Theo quy tắc ghi số đã cho, năm điểm liên tiếp tiếp theo sẽ được ghi năm số lần lượt là (xem hình trên)

$$b-ab; 1-a; 1-a-b+ab; 1-b; a-ab.$$

Tổng các số ghi tại điểm trên là

$$a+ab+b+b-ab+1-a+1-a-b+ab+1-b+a-ab=3.$$

Cũng theo quy tắc ghi số này, dễ suy ra điểm thứ 9 được tô màu xanh và tại đó ghi $(a-ab):(1-b)=a$. Từ đó suy ra điểm thứ 10 được tô màu đỏ và ghi số $a-(a-ab)=ab$, điểm thứ 11 được tô màu xanh và ghi số $ab:a=b$.

Như vậy, bộ 8 điểm tiếp theo được lặp lại như bộ 8 điểm đầu tiên.

Do đó, 2024 số đã ghi được chia thành 253 nhóm, mỗi nhóm gồm 8 số theo quy luật trên.

Vậy tổng 2024 số ghi trên đường tròn là $253.3=759$.

Câu 13. *(Trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2020-2021)*

Thầy Du viết số 2020^{2021} thành tổng của các số nguyên dương rồi đem cộng tất cả các chữ số của các số nguyên dương này với nhau. Hỏi thầy Du có thể nhận được kết quả là số 2021 hoặc 2022 được không? Tại sao?

Lời giải

Nhận xét. Cho số nguyên dương m, kí hiệu $S(m)$ là tổng các chữ số của m. Khi đó $S(m)\equiv m(\bmod 9)$.

Chứng minh. Giả sử $m=\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0}=a_k.10^k+a_{k-1}.10^{k-1}+...+a_1.10+a_0$

$$\equiv a_k+a_{k-1}+...+a_1+a_0(\bmod 9)\Rightarrow S(m)\equiv m(\bmod 9).$$

Ta có $2020\equiv 4(\bmod 9)\Rightarrow 2020^{2021}\equiv 4^{2021}(\bmod 9)\equiv 4^{3.673+2}(\bmod 9)$

Do $4^3\equiv 1(\bmod 9)\Rightarrow 2020^{2021}\equiv 4^2(\bmod 9)\equiv 7(\bmod 9)$

Mặt khác $2021\equiv 5(\bmod 9), 2022\equiv 6(\bmod 9)$

Từ đó suy ra $2020^{2021}\not\equiv 2021(\bmod 9)$, $2020^{2021}\not\equiv 2022(\bmod 9)$.

Do đó thầy Du không nhận được kết quả là 2021 và 2022.

Câu 14. *(Trường chuyên Ninh Bình năm 2020-2021)*

Với số thực a, ta định nghĩa phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và kí hiệu là $[a]$. Dãy các số $x_0,x_1,x_2,.....,x_n,...$ được xác định bởi công thức $x_n=\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]$. Hỏi trong 200 số $\{x_0,x_1,x_2,.....,x_{199}\}$ có bao nhiêu số khác 0? (Biết $1,41<\sqrt{2}<1,42$)

Lời giải

Ta có $x_n=\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]<\frac{n+1}{\sqrt{2}}-\left(\frac{n}{\sqrt{2}}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+1<2\Rightarrow 0\le x_n\le 1$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_n=0\\x_n=1\end{array}\right.$ Nên các số khác 0 chỉ nhận giá trị bằng 1.

$$\sum_{i=0}^{199}x_i=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{0}{\sqrt{2}}\right]+\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]+...+\left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{199}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right]=\left[100\sqrt{2}\right]$$

Mà $141<100\sqrt{2}<142$ nên số các số khác 0 là 141

Câu 15. *(Trường chuyên Long An năm 2020-2021)*

Cho đa giác đều 24 cạnh $A_1A_2....A_{23}A_{24}$. Có tất cả bao nhiêu tam giác vuông nhưng không phải là tam giác vuông cân được tạo thành từ các đỉnh của đa giác trên?

Lời giải

Đa giác đều $A_1A_2....A_{23}A_{24}$ sẽ nội tiếp đường tròn tâm O và $A_1A_{13}, A_2A_{14},...., A_{12}A_{24}$ là 12 đường kính của đường tròn trên.

Từ đường kính A_1A_{13} ta có 22 tam giác vuông: $A_1A_{13}A_2, A_1A_{13}A_3,..., A_1A_{13}A_{12}, A_1A_{13}A_{14},..., A_1A_{13}A_{24}$

Trong 22 tam giác vuông trên thì có 2 tam giác cân là $A_1A_{13}A_7, A_1A_{13}A_{19}$

Tương tự cho các đường kính khác, tổng cộng ta có 240 tam giác thỏa đề bài.

Câu 16. *(Trường chuyên Hải Phòng năm 2020-2021)*

Giả sử rằng A là tập hợp con của tập hợp $\{1;\ 2;\ 3;\ldots;\ 1023\}$ sao cho A không chứa hai số nào mà số này gấp đôi số kia. Hỏi A có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải

Chia các số từ 1 đến 1023 thành các tập con $A_0 = \{1\}, A_1 = \{2;3\}, A_2 = \{4;5;6;7\}$,

$A_3 = \{8;9;...;15\}, A_4 = \{16;17;...;31\}, A_5 = \{32;33;....;63\}$,

$A_6 = \{64;65;...;127\}, A_7 = \{128;129;...;255\}, A_8 = \{256;257;...;511\}$

$A_9 = \{512;513;...;1023\}$

Dễ thấy số phần tử của tập A_k là $2^k, k = 0,1,...,9$.

Nhận thấy $n \in A_k \Leftrightarrow 2n \in A_{k+1}$.

Xét $A = A_9 \cup A_7 \cup A_5 \cup A_3 \cup A_1 \Rightarrow |A| = 512 + 128 + 32 + 8 + 2 = 682$, rõ ràng A không chứa số nào gấp đôi số khác.

Ta chỉ ra rằng không thể chọn tập con có nhiều hơn 682 số thỏa mãn bài ra.

Thật vậy: Giả sử tập A thỏa mãn yêu cầu bài toán và chứa a_k phần tử thuộc A_k, $k = 0,1,..,9$.

Xét các tập hợp A_k và A_{k+1}. Với $m \in A_k$ tùy ý, ta có $2m \in A_{k+1}$. Số các cặp $(m, 2m)$ như vậy là 2^k và trong mỗi cặp như vậy có nhiều nhất một số thuộc A.

Ngoài ra tập A_{k+1} còn chứa 2^k số lẻ, tức là có nhiều nhất $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ số thuộc A được lấy từ A_k và A_{k+1}.

Suy ra $a_0 + a_1 \le 2^1, a_2 + a_3 \le 2^3, a_4 + a_5 \le 2^5, a_6 + a_7 \le 2^7, a_8 + a_9 \le 2^9$. Cộng các bất đẳng thức ta được $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9 \le 682$. Vậy số phần tử lớn nhất của A là 682.

Chuyên đề 10

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2020-2021)*

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC, K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF.

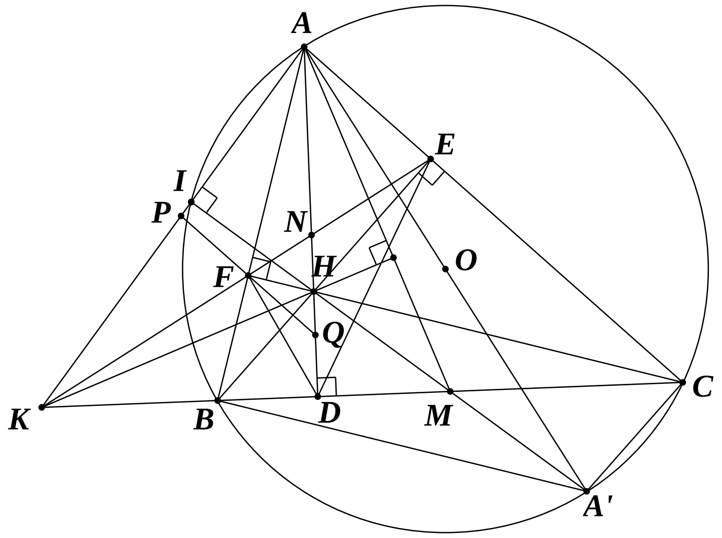
1) Chứng minh rằng $KB.KC = KE.KF$ và H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF.

2) Qua điểm F kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AC, đường thẳng này cắt các đường thẳng AK, AD lần lượt tại P và Q. Chứng minh $FP = FQ$.

3) Chứng minh rằng đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng AM.

Lời giải

1. (2,0 điểm) Chứng minh rằng $KB.KC = KE.KF$ và H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF.



Chỉ ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp và tam giác KBF đồng dạng với tam giác KEC

Khi đó $\dfrac{KF}{KC} = \dfrac{KB}{KE} \Leftrightarrow KB.KC = KE.KF$.

Chỉ ra tứ giác $BDHF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{FBH} = \widehat{FDH}$ (1)

Chỉ ra tứ giác $CDHE$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ (2)

Ta có $\widehat{FBE} = \widehat{FCE}$ (3) vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

Từ (1), (2) và $(3) \Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{EDH}$ $\Rightarrow HD$ là phân giác của $\widehat{FDE}$ (4)

Chứng minh tương tự, ta được HE là phân giác của $\widehat{FED}$ (5)

Từ (4) và $(5) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

2. (2,0 điểm) Qua điểm F kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AC , đường thẳng này cắt các đường thẳng AK , AD lần lượt tại P và Q . Chứng minh $FP = FQ$.

Gọi N là giao điểm của AD và KE

Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác DEF ta có $\frac{NF}{NE} = \frac{DF}{DE}$ (6).

Ta có KD là phân giác ngoài của tam giác FDE tại đỉnh D . Theo tính chất đường phân giác ngoài của tam giác DEF ta có $\frac{KF}{KE} = \frac{DF}{DE}$ (7).

Từ (6) và $(7) \Rightarrow \frac{NF}{NE} = \frac{KF}{KE}$ (8)

Vì PQ song song với AC , theo định lí Talet mở rộng ta có: $\frac{NF}{NE} = \frac{FQ}{AE}$ và $\frac{KF}{KE} = \frac{FP}{AE}$

(9)

Từ (8) và $(9) \Rightarrow \frac{FQ}{AE} = \frac{FP}{AE} \Rightarrow FQ = FP$ (đpcm).

3. (2 điểm) Chứng minh rằng đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng AM .

Gọi I là giao điểm của KA với đường tròn (O) (I khác A) và A' là điểm đối xứng với A qua O .

Chứng minh được tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành. Suy ra ba điểm H , M , A' thẳng hàng.

Vì tứ giác $AIBC$ nội tiếp đường tròn (O) nên $KI.KA = KB.KC$

Theo phần a) thì $KB.KC = KF.KE$. Suy ra $KI.KA = KF.KE \Rightarrow$ tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

Vì ba điểm A , E , F thuộc đường tròn đường kính AH suy ra I thuộc đường tròn đường kính $AH \Rightarrow AI \perp HI$.

Ta có $\widehat{AIA'} = 90^o \Rightarrow AI \perp A'I$. Kết hợp với $AI \perp HI$ suy ra ba điểm H , I , A' thẳng hàng.

Mặt khác ba điểm H , M , A' thẳng hàng

Suy ra bốn điểm H , M , I , A' thẳng hàng.

Xét tam giác AKM có $AH \perp KM$ và $MH \perp AK$ nên H là trực tâm tam giác AKM .

Suy ra $KH \perp AM$ (đpcm).

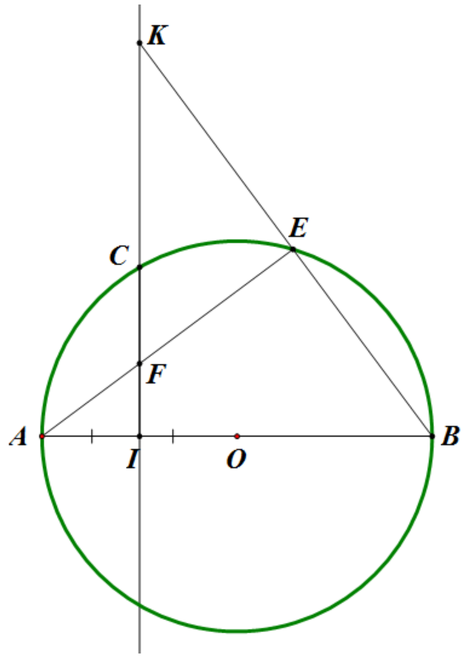
Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2020-2021)*

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, gọi I là trung điểm của đoạn OA , Vẽ tia Ix vuông góc AB với cắt nửa đường tròn tại C . Lấy điểm E trên cung nhỏ $BC\left(E \neq B, E \neq C\right)$ nối AE cắt CI tại F .

a) Chứng minh rằng $BEFI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của hai tia BE và Ix . Giả sử F là trung điểm của IC . Chứng minh rằng hai tam giác AIF và KIB đồng dạng. Tính IK theo R

Lời giải



a) Có: $\widehat{AEB} = 90°$ (chắn nửa đường tròn đường kinh AB)

$\Rightarrow$ $\widehat{FEB} = 90° \Rightarrow$ E $\in$ đường tròn đường kính FB (1)

Có: $\widehat{FIB} = 90°$ ($Ix \perp AB$ tại I)$\Rightarrow$ $I \in$ đường tròn đường kính FB (2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow$ E, I, F, B thuộc cùng 1 đường tròn$\Rightarrow$ Tứ giác $BEFI$ là tứ giác nội tiếp

b) Xét ΔKFE và ΔKBI có:

$$\left.\begin{matrix} \widehat{KEF} = \widehat{KIB} = 90° \\ \widehat{FKE}\ chung \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta KFE \backsim \Delta KBI \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{KFE} = \widehat{KBI} \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Mà $\widehat{KFE} = \widehat{AFI}$ (2 góc đối đỉnh)$\Rightarrow$ $\widehat{KBI} = \widehat{AFI}$

Xét ΔAFI và ΔKBI có:

$$\left.\begin{matrix} \widehat{AIF} = \widehat{KIB} = 90° \\ \widehat{AFI} = \widehat{KBI} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{hai tam giác } AIF \text{ và } KIB \text{ đồng dạng (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AI}{KI} = \frac{FI}{BI} \text{(2 cặp cạnh tương ứng)}$$

Xét ΔCIO có:

$$IC^2 = CO^2 - IO^2 \Rightarrow IC^2 = R^2 - (\frac{1}{2}R)^2 \Rightarrow IC^2 = \frac{3}{4}R^2 \Rightarrow IC = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$IF = \frac{1}{2}IC \text{(} F \text{ là trung điểm } IC \text{)} \Rightarrow IF = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{4}R$$

Có: $\dfrac{AI}{KI} = \dfrac{FI}{BI} \Rightarrow \dfrac{\frac{R}{4}}{KI} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}R}{\frac{3R}{4}} \Rightarrow KI = \dfrac{\sqrt{3}}{4}R$

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bình Dương năm 2020-2021)*

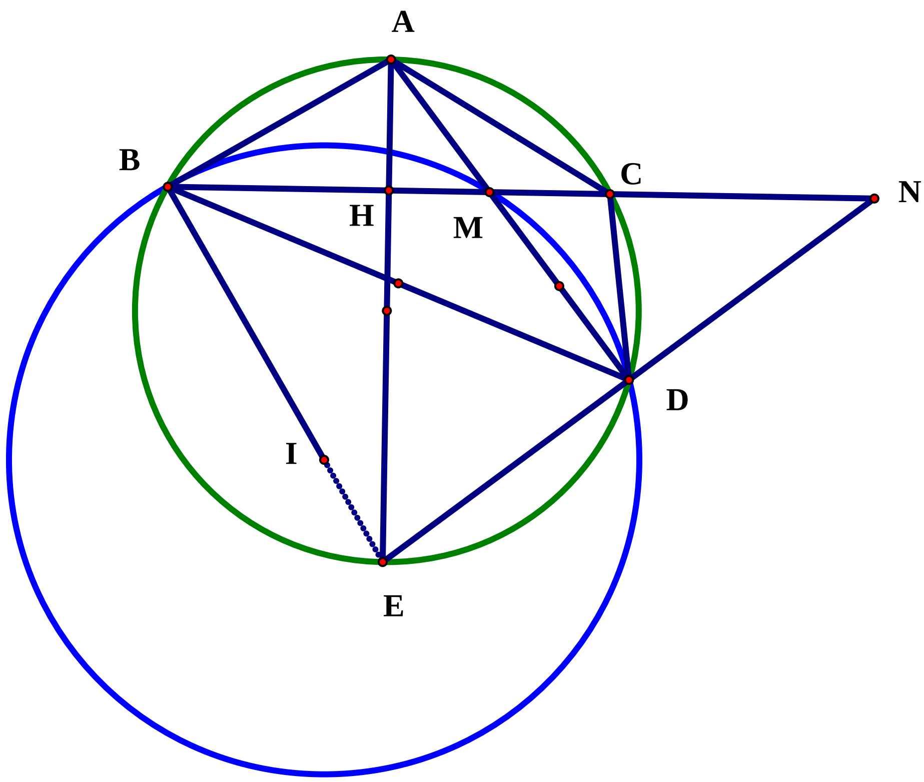
Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{BAC} > 90^0\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM > CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC, ED cắt BC tại N.

a) Chứng minh rằng $MA.MD = MB.MC$ và $BN.CM = BM.CN$.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

c) Khi $2AB = R$ xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $MA.MD = MB.MC$ và $BN.CM = BM.CN$.

Xét ΔAMB và ΔCMD có

$\widehat{ABH} = \widehat{ADC} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AC}$

$\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (2 góc đối đỉnh)

Vậy $\Delta AMB = \Delta CMD(g.g) \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{BM}{MD} \Rightarrow AM.DM = CM.MB$.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

$\widehat{ADE} = 90^0 \Rightarrow \Delta AHM \backsim \Delta NDM\,(g.g) \Rightarrow \frac{MH}{MD} = \frac{AM}{NM}$

$\Rightarrow MH.MN = AM.MD \Rightarrow MH.MN = CM.MB$

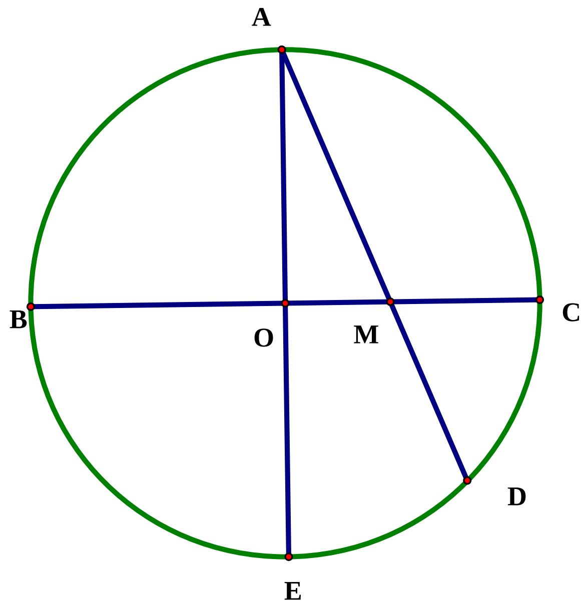
$$\Rightarrow \frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MH} = \frac{MN+2MB}{MC+2MH} = \frac{BN+MB}{HC+MH} = \frac{BN+MB}{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{MN-MC}{MC} = \frac{BN}{BM} \Rightarrow \frac{CN}{MC} = \frac{BN}{BM} \Rightarrow CN.BM = MC.BN.$$

Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{ADC} \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của $(I) \Rightarrow AB \perp BI$.

Mà $AB \perp BE \Rightarrow B, I, E$ thẳng hàng.

c) Khi $2AB = R$ xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị lớn nhất.



Có $\Delta AMB \backsim \Delta CMD \Rightarrow \frac{MA}{CM} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MA.MD = MB.MC$

$$\Rightarrow AM.(AD - AM) = MB.MC = (R + OM)(R - OM)$$

$$\Rightarrow MA.AD = R^2 + AM^2 - OM^2 = 2R^2 \Rightarrow MA = \frac{2R^2}{AD}$$

Có $2MA + AD = \frac{4R^2}{AD} + AD \geq 4R$ (Bất đẳng thức AM-GM)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $AD = 2R$, $MA = R$ hay $M \equiv O$.

Vậy khi $M \equiv O$ thì $2MA + AD$ nhận giá trị lớn nhất là $2MA + AD = 4R$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Cà Mau năm 2020-2021)*

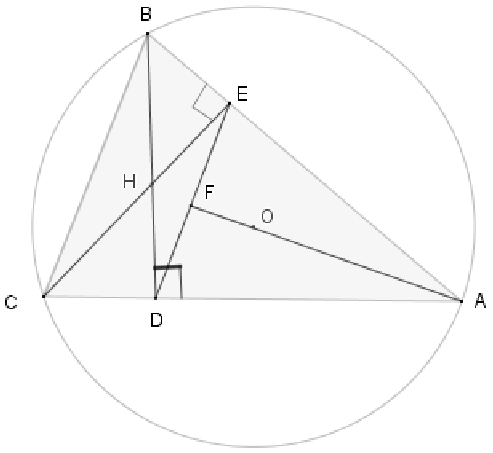
1. Cho ΔABC có các góc đều nhọn. Vẽ đường cao BD và CE của ΔABC. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $DE.AC = BC.AE$

c) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng $OA \perp DE$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: Tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn

Theo gỉa thiết ta có:

$\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn đường kính AH

b) Chứng minh rằng: $DE.AC = BC.AE$

vì $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow$ tứ giác BEDC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BED} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BED} = \widehat{DEA}$.

Xét ΔAED và ΔACB có: $\widehat{DAE}$ chung

$\widehat{DEA} = \widehat{BCA}$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \Delta AED \backsim \Delta ACB \ (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow DE.AC = BC.AE$$

c) Chứng minh rằng $OA \perp DE$.

gọi OA cắt ED tại F.

$\widehat{AFD} = 180^\circ - \widehat{FAD} - \widehat{FDA}$

$\widehat{AFD} = 180^\circ - \widehat{OAC} - \widehat{EDA}$ (1)

Xét ΔOAC có: $OA = OC \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{OAC} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABC} \quad (2)$$

Lại có: $\widehat{EDA} = \widehat{ABC}$ (vì $\Delta AED \backsim \Delta ACB$) (3)

Từ (1);(2);(3) $\Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - \left(90^\circ - \widehat{ABC}\right) - \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow AF \perp FD$ hay $AO \perp ED$

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Nông năm 2020-2021)*

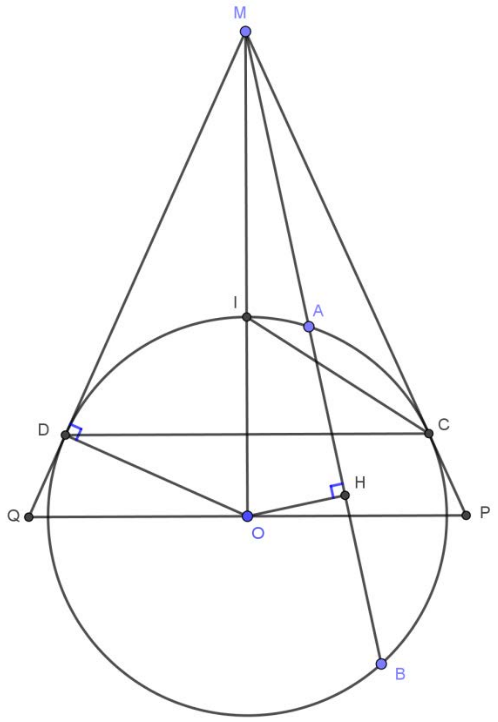
Cho đường tròn $(O;R)$. Một đường thẳng d không đi qua tâm O cắt đường tròn tại hai điểm A và B, trên tia đối của tia AB lấy một điểm M. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MC và MD với đường tròn (O) (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1) Chứng minh bốn điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Đoạn thẳng OM cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

3) Vẽ một đường thẳng qua điểm O vuông góc với đoạn thẳng OM và cắt các tia MC, MD theo thứ tự hai điểm P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Lời giải



1) Theo giả thiết, $OH \perp MH$ nên H thuộc đường tròn đường kính OM.

MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $OD \perp MD \Rightarrow D$ thuộc đường tròn đường kính OM.

Vậy bốn điểm M, O, H, D cùng thuộc một đường tròn đường kính OM.

2) Xét hai tam giác OMC và OMD có OM (chung), $OC = OD = R$, $\widehat{OCM} = \widehat{ODM} = 90°$.

Suy ra $\Delta OMC = \Delta OMD$ nên $\widehat{OMC} = \widehat{OMD} \Rightarrow MO$ là tia phân giác của góc $\widehat{CMD}$.

Xét hai tam giác IOC và IOD có $OI = OC = OD = R$ và $\widehat{COI} = \widehat{DOI}$ nên $\Delta IOC = \Delta IOD$

Suy ra $IC = ID \Rightarrow \overset{\frown}{IC} = \overset{\frown}{ID} \Rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{ICD} \Rightarrow CI$ là tia phân giác của góc $\widehat{MCD}$.

Do đó, I là giao điểm 3 đường phân giác trong tam giác MCD, hay điểm I cách đều 3 cạnh của tam giác MCD.

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

3) Ta có $MD.DQ = R^2$

Có $MQ = MD + DQ \overset{Co-si}{\geq} 2\sqrt{MD.DQ} = 2R$.

$S_{\Delta MPQ} = 2S_{\Delta MOQ} = OD.MQ \geq 2R^2$.

Dấu bằng xảy ra khi $MD = DQ \Rightarrow \Delta MOQ$ vuông cân $\Rightarrow MO = OP\sqrt{2} = R\sqrt{2}$.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2020-2021)*

Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AB tại H (B nằm giữa A và H). Lấy điểm C bất kì trên (O) (C khác A, B), D là giao điểm của AC và d, DE là một tiếp tuyến của (O), với E là tiếp điểm (E cùng phía với B, bờ là đường thẳng AC).

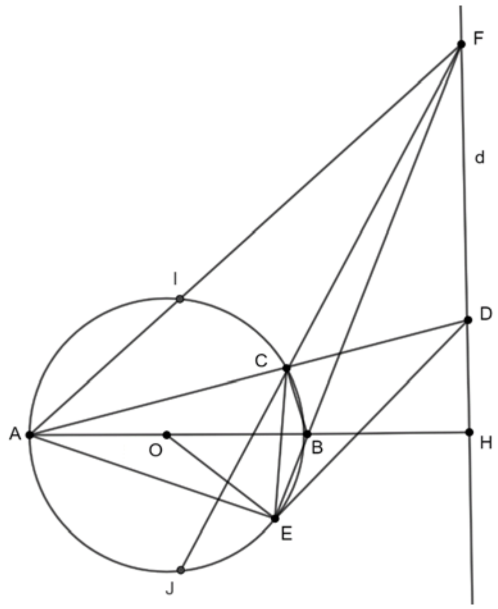
a) Chứng minh: $BCDH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: Hai tam giác CDE và EDA đồng dạng.

c) CMR: biểu thức $(DA^2 - DE^2)$ không phụ thuộc vào vị trí điểm C trên (O).

d) Gọi F là giao điểm của đường thẳng EB và d, I là giao điểm thứ hai của AF với (O) và J là điểm đối xứng của I qua AB. CMR: F, C, J thẳng hàng.

Lời giải



a) $\widehat{ACB} = \widehat{BHD} = 90^o$

$\Rightarrow BCDH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do ED là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{DEC} = \widehat{EAD}$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Xét ΔDEC và ΔDAE, ta có:

$\widehat{DEC} = \widehat{EAD}$

$\widehat{ADE}$: chung

$\Rightarrow \Delta DEC \backsim \Delta DAE$

c) Từ ý a,b suy ra: $DA^2 - DE^2 = DA^2 - DC.DA$

$$= DA.(DA - DC)$$

$= DA.CA$

$= AB.AH = const$

d) $\widehat{AEF} = \widehat{AHF} = 90^o \Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{EFH}\,(1)$

Do ED là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{EAH} = \widehat{DEF}\,(2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \Delta EDF$ cân tại D.

$\Rightarrow DF^2 = DE^2 = DC.DA$

$\Rightarrow \dfrac{DF}{DA} = \dfrac{DC}{DF}$

Và $\widehat{ADF}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta DCF \backsim \Delta DFA$(c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{DAF} = \widehat{CJI}$

Mà IJ//d (do cùng vuông góc với AB) nên F, C, J thẳng hàng (đpcm)

Câu 7. *(Trường chuyên tin Hà Tĩnh năm 2020-2021)*

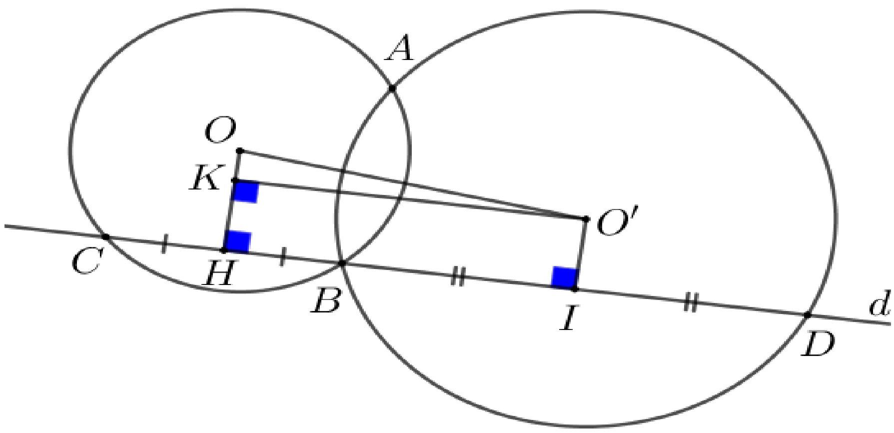
Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho hai tâm O và O' nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Đường thẳng d thay đổi đi qua B cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D (d không trùng với đường thẳng AB).

1. Xác định vị trí của đường thẳng d sao cho đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất.

2. Gọi M là điểm di chuyển từ điểm A, ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O) ; N là điểm di chuyển từ điểm A, cùng chiều kim đồng hồ trên (O') sao cho góc $\widehat{AOM}$ luôn bằng góc $\widehat{AO'N}$. Chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

1. Xác định vị trí của đường thẳng d sao cho đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất.



Kẻ $OH \perp CD; O'I \perp CD; O'K \perp OH \Rightarrow HC = HB; IB = ID$

Ta có: $CD = 2HB + 2BI = 2(HB + BI) = 2HI \quad (1)$

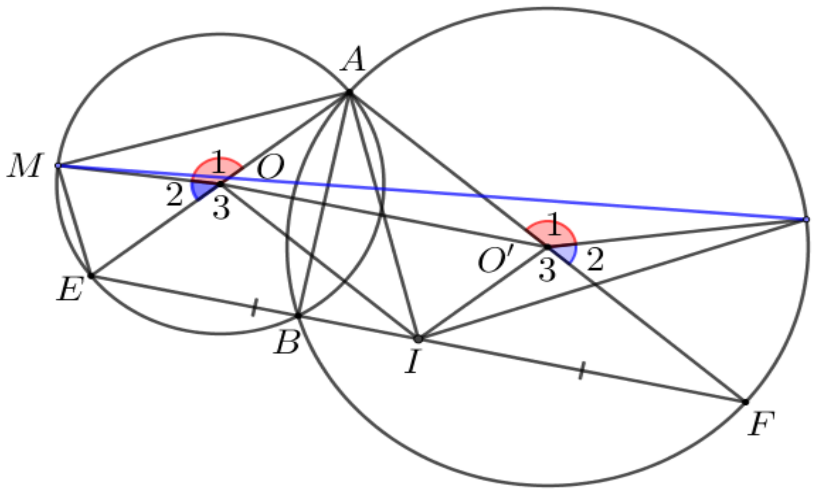
Xét tứ giác $O'KHI$ có: $\widehat{K}=\widehat{H}=\hat{I}=90^\circ \Rightarrow O'KHI$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow O'K=HI \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD=2O'K$. Mà $O'K\le O'O \Rightarrow CD\le 2O'O$

Vậy CD lớn nhất bằng $2O'O$ khi $d\,//\,OO'$.

2. Gọi M là điểm di chuyển từ điểm A, ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O) ; N là điểm di chuyển từ điểm A, cùng chiều kim đồng hồ trên (O') sao cho góc $\widehat{AOM}$ luôn bằng góc $\widehat{AO'N}$. Chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.



Kẻ đường kính AE của đường tròn (O) và đường kính AF của đường tròn (O').

Nên E,F là điểm cố định. Gọi I là trung điểm của EF.

$\Rightarrow I$ cố định.

+) Theo bài ta có: $AOIO'$ là hình bình hành $\Rightarrow O'I=AO=OM$; $O'N=O'A=OI \quad (1)$

$AO\,//\,O'I; AO'\,//\,OI$ nên $\widehat{O'_3}=\widehat{O_3}=\widehat{BAF}$

+) Ta lại có: $\widehat{AOM}=\widehat{AO'N}$ hay $\widehat{O_1}=\widehat{O'_1} \Rightarrow \widehat{O_2}=\widehat{O'_2}$

Từ đây suy ra: $\widehat{O_2}+\widehat{O_3}=\widehat{O'_2}+\widehat{O'_3}$ hay $\widehat{MOI}=\widehat{NO'I} \quad (2)$

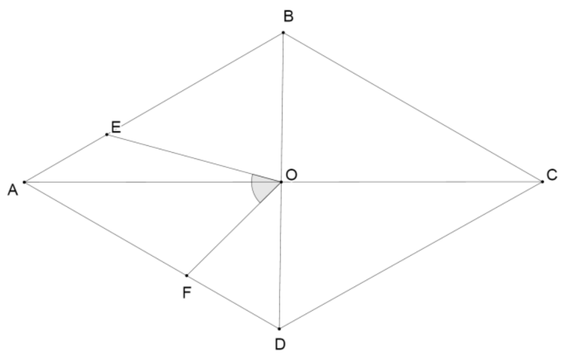
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MOI=\Delta IO'N\ (c.g.c) \Rightarrow IM=IN$ (hay trung trực MN đi qua điểm I cố định).

Do M di chuyển từ điểm A ngược chiều kim đồng hồ trên (O); N di chuyển từ điểm A cùng chiều kim đồng hồ trên (O') nên khi $M\equiv E; N\equiv F$ thì $MN\equiv EF \Rightarrow$ trung trực MN đi qua điểm I cố định.

Câu 8. *(Trường chuyên Long An năm 2020-2021)*

Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , có $\widehat{ABC}=120^0$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Trên các cạnh AB, AD tương ứng lấy các điểm E,F không trùng với các đỉnh của hình thoi đã cho , sao cho $\widehat{EOF}=60^0$. Hãy tính tích $BE.DF$ theo a.

Lời giải



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BOE}+\widehat{EOF}+\widehat{FOD}=180^\circ\\ \widehat{OFD}+\widehat{FDO}+\widehat{FOD}=180^\circ\\ \widehat{EOF}=\widehat{FDO}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{BOE}=\widehat{OFD}$$

Xét ΔBEO và ΔDOF có: $\left.\begin{array}{l}\widehat{BOE}=\widehat{OFD}\\ \widehat{EBO}=\widehat{FDO}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta BEO\#\,\Delta DOF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BE}{DO}=\frac{BO}{DF}\Rightarrow BE.DF=DO.BO=\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}$$

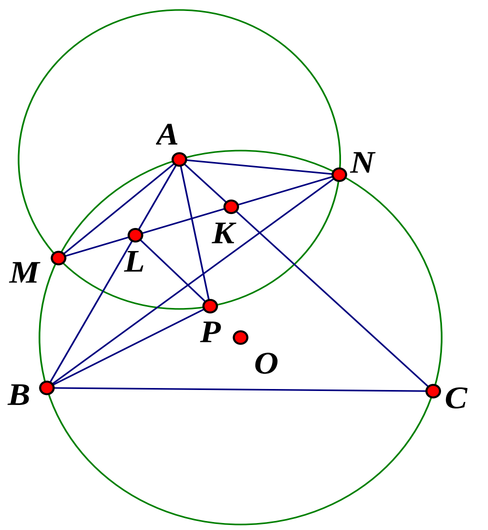
Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Cho tam giác $ABC\left(AB\le AC\right)$. Lấy điểm P nằm trong tam giác đó sao cho $AP<AB$. Đường tròn tâm A bán kính AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm phân biệt M,N (M khác phía với C đối với đường thẳng AB). Đường thẳng MN cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại L,K .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BLKC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng tam giác ABP đồng dạng với tam giác APL .

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác $BLKC$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có : $AM = AN$ = bán kính

Nên : ΔAMN cân tại A

Suy ra: $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$

Mà :

$$\begin{cases} \widehat{AMN} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AN} \\ \widehat{ANM} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AM} \end{cases}$$

Do đó: $sd\,\overset{\frown}{AN} = sd\,\overset{\frown}{AM}$

Ta có :

$$\begin{cases} \widehat{ALN} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{AN} + sd\,\overset{\frown}{BM}}{2} \\ \widehat{ACB} = \widehat{ACM} + \widehat{MCB} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AM} + \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BM} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{AM} + sd\,\overset{\frown}{BM}}{2} \\ sd\,\overset{\frown}{AN} = sd\,\overset{\frown}{AM} \end{cases}$$

Nên : $\widehat{ALN} = \widehat{ACB}$

Suy ra tứ giác $BLKC$ nội tiếp (góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

b) Chứng minh rằng tam giác ABP đồng dạng với tam giác APL .

Ta có :

$$\begin{cases} \widehat{ANL} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AM} \\ \widehat{ABN} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AN} \\ \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AM} \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{ANL} = \widehat{ABN}$

Xét ΔABN và ΔANL , ta có:

$\widehat{ANL} = \widehat{ABN}$ (cmt)

$\widehat{NAL} = \widehat{BAN}$ (góc chung)

Vậy : ΔABN đồng dạng ΔANL (g.g)

Suy ra : $\dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AN}{AL}$

$\Rightarrow AN^2 = AB.AL$

Mà: $AN = AP$ = bán kính

Nên : $AP^2 = AB.AL$

Xét ΔAPL và ΔABP , ta có:

$\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AL}{AP}$ ($AP^2 = AB.AL$)

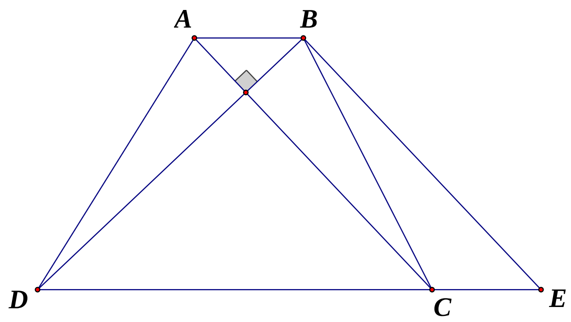
$\widehat{PAL} = \widehat{BAP}$ (góc chung)

Vậy : ΔAPL đồng dạng ΔABP (g.g)

Câu 10. *(Trường chuyên Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Cho hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$, hai đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC=8cm$; $BD=6cm$. Tính chiều cao hình thang.

Lời giải



Giả sử $AB<CD$.

Từ B kẻ $BE\ //\ AC$, $E\in CD$. Ta có $AC\perp BD; AC\ //\ BE\Rightarrow BE\perp BD\Rightarrow \Delta BED$ vuông tại B.

Xét tứ giác $ABEC$ có $BE\ //\ AC\left(gt\right)$ và $AB\ //\ CE\left(AB\ //\ CD\right)$ nên tg $ABEC$ là hình bình hành.

Suy ra $AB=CE$ và $AC=BE=6cm$.

Xét ΔBDE vuông cân tại B có $DE^2=BD^2+BE^2\Rightarrow DE^2=6^2+8^2\Rightarrow DE=10$ cm.

Gọi h là độ dài đường cao của hình thang cần tìm.

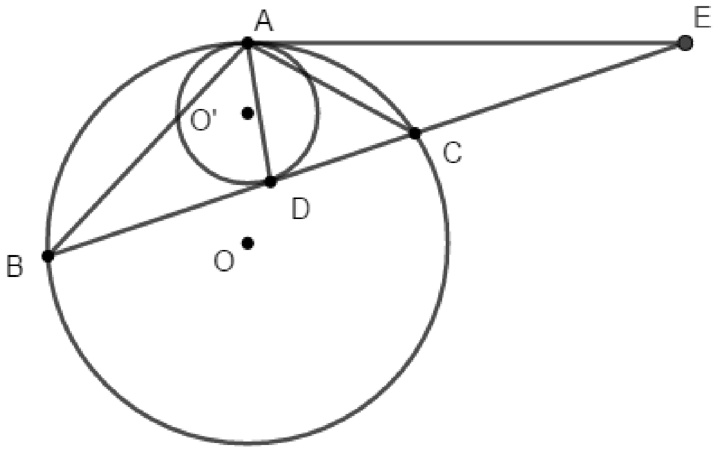
Ta có $S_{ABCD}=\dfrac{AB+CD}{2}.h=\dfrac{CE+CD}{2}.h=\dfrac{6.8}{2}$.

$\Rightarrow \dfrac{DE}{2}.h=\dfrac{48}{2}\Rightarrow h=4,8$ cm.

Câu 11. *(Trường chuyên Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $(O';R')$ tiếp xúc trong tại điểm A(trong đó $R>R'$). Gọi BC là một dây của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại D. Chứng minh AD là tia phân giác của góc BAC

Lời giải



Kẻ tiếp tuyến tại A của hai đường tròn cắt BC tại E.

Ta có ED là tiếp tuyến của đường tròn (O') (gt), EA là tiếp tuyến của đường tròn (O') (theo cách dựng) $\Rightarrow EA = ED$

Có $\Delta ECA \# \Delta EAB$ (g-g)

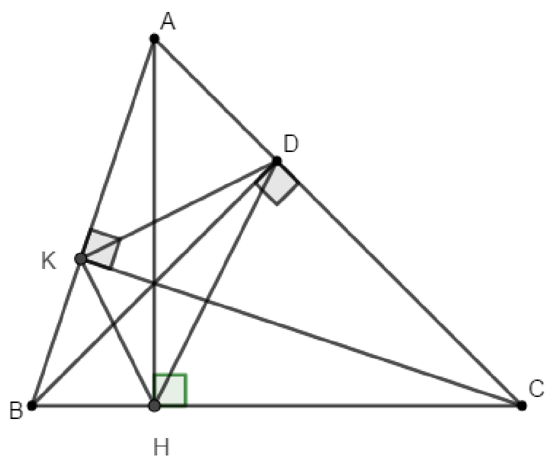
$\Rightarrow \dfrac{EC}{EA} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{EA}{EB} \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{ED}{EB} = \dfrac{ED - EC}{EB - ED} = \dfrac{CD}{BD}$ (T/c tỉ lệ thức)

$\Rightarrow AD$ là tia phân giác $\widehat{BAC}$.

Câu 12. *(Trường chuyên Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Cho tam giác nhọn ABC. Gọi AH, BD, CK là các đường cao của tam giác $(H \in BC, D \in AC, K \in AB)$. Chứng minh rằng : $\dfrac{S_{HDK}}{S_{ABC}} + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$

Lời giải



$\Delta ADK \# \Delta ABC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ADK}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{AK}{AC}\right)^2$

$\dfrac{AD}{AB} = \cos A \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ADK}}{S_{\Delta ABC}} = \cos^2 A$

Tương tự $\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta CDH}}{S_{\Delta ABC}} = \cos^2 C$; $\dfrac{S_{\Delta BKH}}{S_{\Delta ABC}} = \cos^2 B$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta KDH}}{S_{\Delta ABC}} + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{S_{\Delta KDH} + S_{\Delta KDA} + S_{\Delta CDH} + S_{\Delta KBH}}{S_{\Delta ABC}} = 1$

Câu 13. *(Trường chuyên Lạng Sơn năm 2020-2021)*

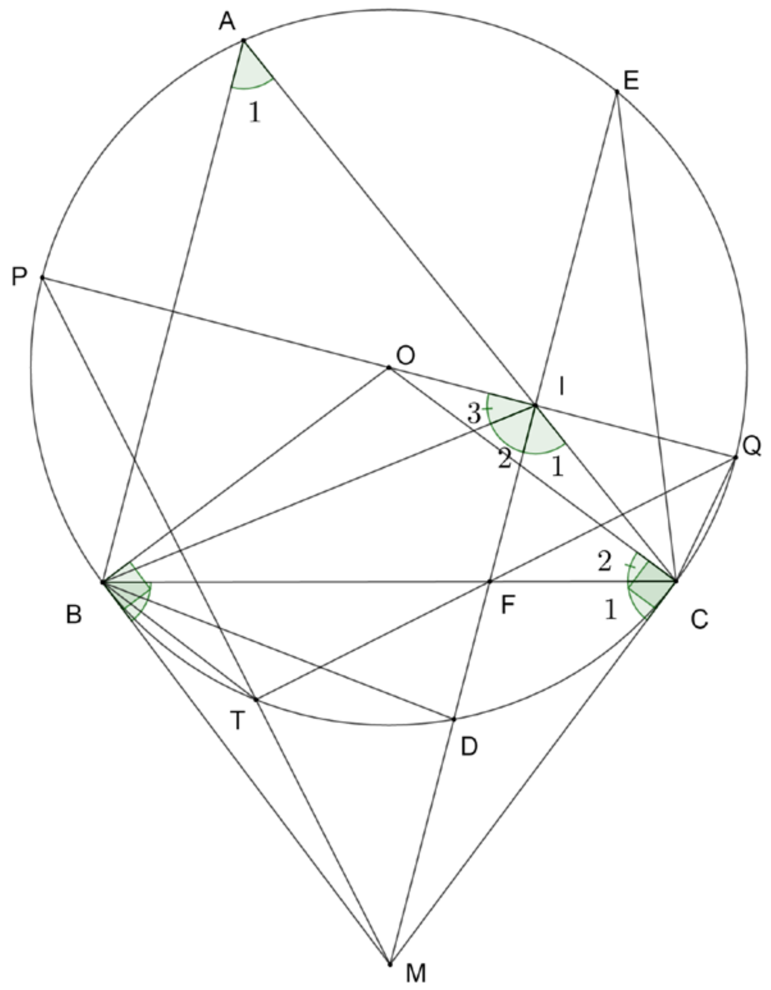
Cho tam giác ABC không có góc tù, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Trong đó B, C cố định trên đường tròn (O), A di động trên cung lớn BC. Các tiếp tuyến với (O) tại B, C cắt nhau tại M. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt (O) tại D và E (D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F, cắt AC tại I.

1) Chứng minh $MBIC$ là tứ giác nội tiếp trong một đường tròn $FI.FM = FD.FE$.

2) Chứng minh $\widehat{MIO} = 90^o$. Tìm vị trí điểm A trên cung lớn BC sao cho diện tích tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

3) Đường thẳng OI cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB). Đường thẳng QF cắt (O) tại T (T khác Q). Chứng minh ba điểm P, T, M thẳng hàng.

Lời giải



1) $AB//ME \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{I_1}$ (so le trong)

$\widehat{A_1} = \widehat{MBC}\left(=\frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC}\right)$

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{I_1}$ mà hai góc có đỉnh kề cùng nhìn cạnh CM $\Rightarrow BICM$ nội tiếp (đpcm)

Xét ΔFEC và ΔFBD có: $\widehat{BFD} = \widehat{EFC}$ (đối đỉnh), $\widehat{BDF} = \widehat{EFC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EB}$)

$\Rightarrow \Delta FEC \backsim \Delta FBD$ (g.g)$\Rightarrow \frac{FE}{FB} = \frac{FC}{FD} \Rightarrow FD.FE = FB.FC$

Xét ΔBFM và ΔIFC có: $\widehat{IFC} = \widehat{MFB}$ (đối đỉnh), $\widehat{MBC} = \widehat{I_1}$ (cmt)$\Rightarrow \Delta BFM \backsim \Delta IFC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{FB}{IF} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow FB.FC = FI.FM$

$\Rightarrow FI.FM = FD.FE\left(= FB.FC\right)$ (đpcm)

2) Ta có: $\widehat{OBM} + \widehat{OCM} = 180^\circ$. Mà 2 góc này đối nhau nên tứ giác $BMCO$ nội tiếp.
Mà $BICM$ nôi tiếp nên B,O,I,C,M thuộc cùng một đường tròn $\Rightarrow BOIC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{I_3} = \widehat{C_2}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BO}$)

$BICM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{I_2} = \widehat{C_1}$

Lại có $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{I_2} + \widehat{I_3} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIO} = 90^\circ$ (đpcm)

B,O,I,C,M thuộc cùng một đường tròn$\Rightarrow S_{IBC}$ lớn nhất khi I là đỉnh chính giữa $\overset{\frown}{BC}$
$\Rightarrow I \equiv O \Rightarrow AC$ là đường kính.

3) PQ là đường kính $\Rightarrow \widehat{PTQ} = 90^\circ$ hay $\widehat{FTP} = 90^\circ$

$\Delta BFT \backsim \Delta QFC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FB}{FQ} = \dfrac{FT}{FC} \Rightarrow FQ.FT = FB.FC$

Mà $FI.FM = FB.FC$ (cmt) nên $FQ.FT = FI.FM \Rightarrow \dfrac{FT}{FI} = \dfrac{IM}{FQ}$

Xét ΔFTM và ΔFIQ có: $\dfrac{FT}{FI} = \dfrac{IM}{FQ}$, $\widehat{IFQ} = \widehat{TFM}$ (đối đỉnh)$\Rightarrow \Delta FTM \backsim \Delta FIQ$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{FTM} = \widehat{FIQ}$. Mà $\widehat{FIQ} = 180^\circ - \widehat{MIO} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FTM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{FTP} + \widehat{FTM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PTM} = 180^\circ \Rightarrow P,T,M$ thẳng hàng (đpcm)

Câu 14. *(Trường chuyên Nam Định năm 2020-2021)*

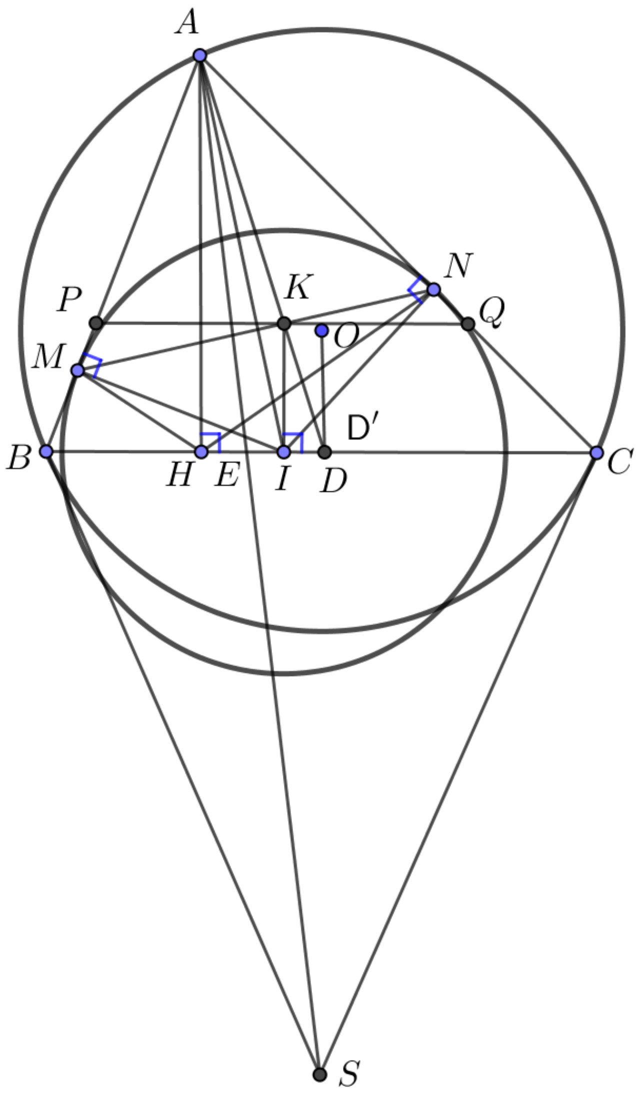
Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại M, N và có tâm I thuộc BC. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.

a) Chứng minh các điểm A, M, H, I, N cũng thuộc một đường tròn và HA là tia phân giác của góc MHN.

b) Đường thẳng đi qua I và vuông góc với BC cắt MN tại K. Chứng minh AK đi qua trung điểm D của BC.

c) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Chứng minh $\widehat{BAS} = \widehat{CAD}$.

Lời giải



a) + $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp HI$ nên H thuộc đường tròn đường kính AI.

+ Đường tròn tâm I tiếp xúc với AB tại M nên $AM \perp MI$ nên M thuộc đường tròn đường kính AI.

+ Đường tròn tâm I tiếp xúc với AC tại N nên $AN \perp NI$ nên N thuộc đường tròn đường kính AI.

Vậy các điểm A, M, H, I, N cùng thuộc đường tròn đường kính AI.

+ Xét hai tam giác AMI và ANI có AI chung; $IM = IN$ (bán kính đường tròn tâm (I)); $AMI = ANI = 90^\circ$ nên $\Delta AMI = \Delta ANI \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{AIN}$.

Mặt khác, $\widehat{AIM} = \widehat{AHM}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AM}$ của đường tròn tâm I); $\widehat{AIN} = \widehat{AHN}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AN}$ của đường tròn tâm I).

Vậy $\widehat{AHM} = \widehat{AHN}$ hay AH là tia phân giác của góc MHN.

b) Kẻ đường thẳng đi qua K và song song với BC cắt AB và AC tại P và Q.

Ta có $\widehat{IKP} + \widehat{IMP} = 180^\circ$, suy ra tứ giác $IKPM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{KIP} = \widehat{KMP}$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{KIQ} = \widehat{KNA}$. Suy ra $\widehat{KIP} = \widehat{KIQ}$.

Xét tam giác IPQ có IK vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên nó là tam giác cân, suy ra IK là đường trung tuyến, hay K là trung điểm của PQ.

Dựng D là giao điểm của AK và BC.

Do $PQ//BC$, áp dụng định lý Talet ta có $\frac{KP}{BD}=\frac{AK}{AD}=\frac{KQ}{DC}$, suy ra $DB=DC$.

Suy ra D là trung điểm của BC.

c) Gọi E là giao điểm của AS và BC, G là giao điểm thứ hai của AS và (O).

Trên cạnh BC lấy điểm D' khác E sao cho $\widehat{BAE}=\widehat{CAD'}$, cần chứng minh D' là trung điểm của BC.

Ta có $\widehat{AGB}=\widehat{ACD'}$ và $\widehat{BAG}=\widehat{CAD'}$ nên ΔAGB đồng dạng $\Delta ACD'$.

Suy ra $\frac{GB}{CD'}=\frac{AG}{AC}$ (1)

Ta có $\widehat{AGC}=\widehat{ABD'}$ và $\widehat{CAG}=\widehat{CAD'}$ nên ΔAGC đồng dạng $\Delta ABD'$.

Suy ra $\frac{GC}{BD'}=\frac{AG}{AB}$ (2)

Ta có $\widehat{SBG}=\widehat{SAB}$ nên ΔSBG đồng dạng ΔSAB, suy ra $\frac{SB}{SA}=\frac{BG}{AB}$.

Chứng minh tương tự ta được $\frac{SC}{SA}=\frac{CG}{AC}$. Suy ra $\frac{CG}{CA}=\frac{BG}{BA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $CD'=BD'$ hay D' là trung điểm của BC.

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 15. *(Trường chuyên Nghệ An năm 2020-2021)*

Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh BC là đường phân giác ngoài của tam giác DEF.

b) Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn (O) (M nằm trên cung nhỏ AB); O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME. Chứng minh $AM \perp O_1O_2$.

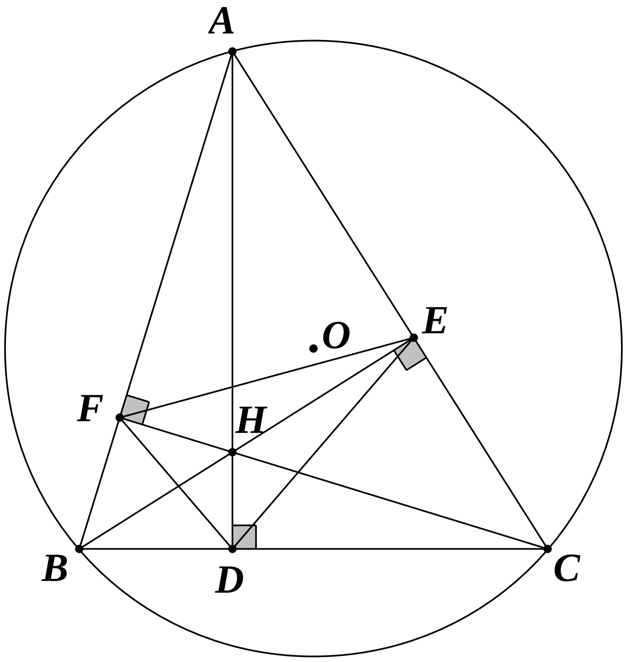
c) Lấy điểm K trên đoạn thẳng HC (K khác H và C), đường thẳng BK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I và đường thẳng CI cắt đường thẳng BE tại điểm G.

Chứng minh hệ thức $S_{\Delta GFB}=\left(\frac{FK}{FC}+\frac{BF.BE}{CF.CE}\right)S_{\Delta CEF}$.

(Trong đó $S_{\Delta GFB}$ là diện tích tam giác GFB, $S_{\Delta CEF}$ là diện tích tam giác CEF).

Lời giải

a)



- Xét tứ giác $ABDE$, có : $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90°$ (do $AD \perp BC; BE \perp AC$)

$\Rightarrow$ tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

Hay $\widehat{FBH} = \widehat{HDE}$ (1)

- Xét tứ giác $BFHD$, có: $\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = 90°$ (do $AD \perp BC; CF \perp AB$) nên

$\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 180^0$

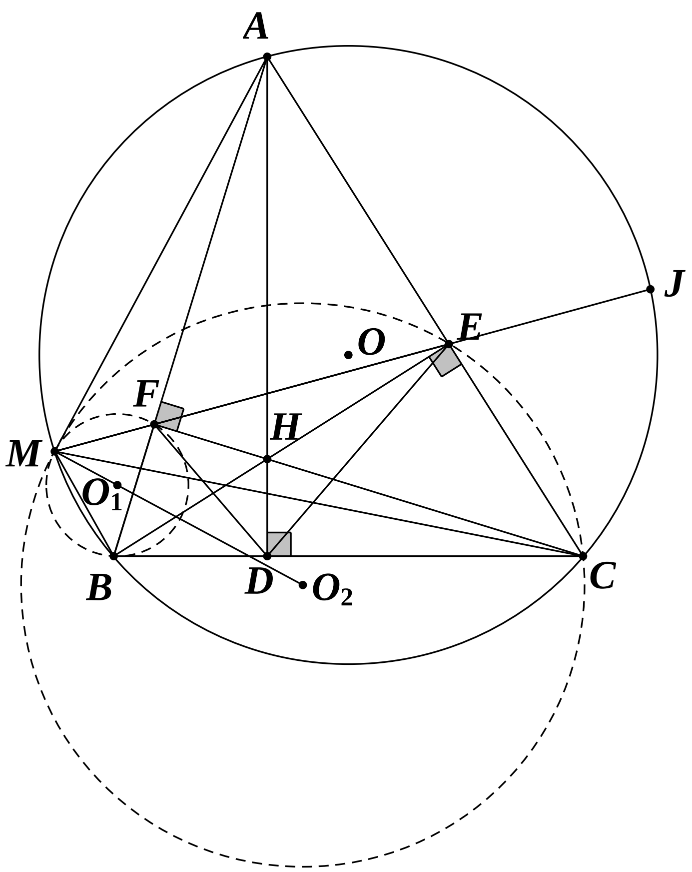
$\Rightarrow$ tứ giác $BFHD$ nội tiếp nên $\widehat{FBH} = \widehat{FDH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FH) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HDE} = \widehat{FDH}$ hay DH là tia phân giác của $\widehat{FDE}$

Mà $DH \perp BC$ nên BC là đường phân giác ngoài của $\widehat{FDE}$.

Vậy BC là đường phân giác ngoài của tam giác DEF

b)



- Gọi J là giao điểm của MF với đường tròn (O)

- Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEM}$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện) (3)

- Trong (O) có : $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AJ} + sd\,\overset{\frown}{JC}\right)$ (4)

$\widehat{AEM} = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AM} + sd\,\overset{\frown}{JC}\right)$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\overset{\frown}{AJ} = \overset{\frown}{AM}$

Mà $\widehat{AMJ} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AJ}; \widehat{ABM} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AM}; \widehat{ACM} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$

Nên $\widehat{AMJ} = \widehat{ABM} = \widehat{ACM}$

- Xét đường tròn (O_1) có $\widehat{AMJ} = \widehat{ABM}$ hay $\widehat{AMF} = \widehat{FBM}$.

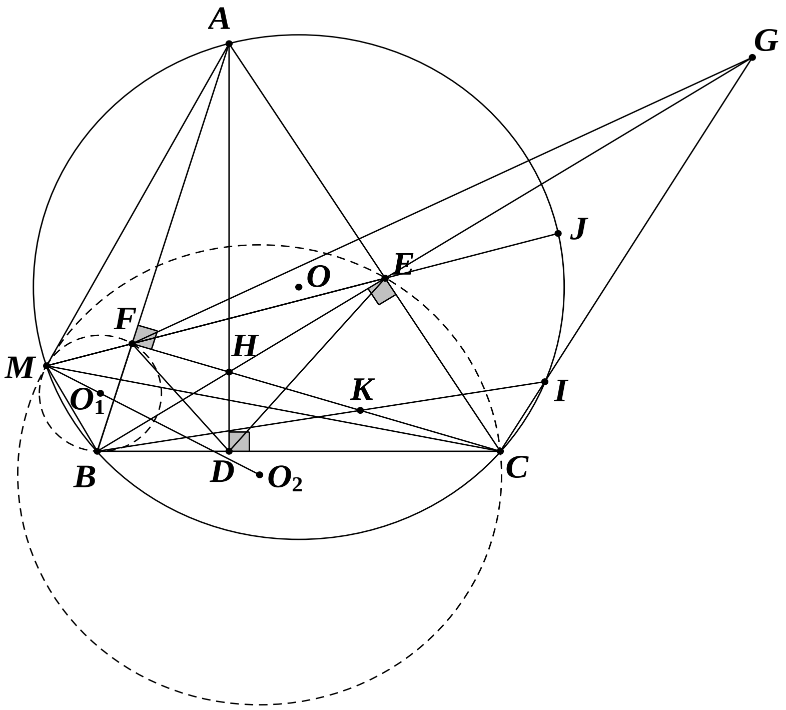
$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của $(O_1) \Rightarrow MA \perp MO_1$ tại M

- Xét đường tròn (O_2) có $\widehat{AMJ} = \widehat{ACM}$ hay $\widehat{AME} = \widehat{ECM}$.

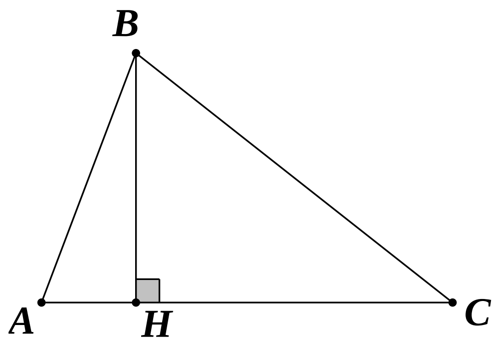
$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của $(O_2) \Rightarrow MA \perp MO_2$ tại M

Do đó $MA \perp O_1O_2$

c)



Ta chứng minh công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$ với A là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng $AB; AC$



Thật vậy, xét ΔABC nhọn có đường cao BH , ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC = \frac{1}{2}\left(AB.\sin A\right)AC = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$$

Áp dụng công thức trên vào ΔGBF và ΔCEF ta được :

$$S_{\Delta GBF} = \frac{1}{2}.BF.BG.\sin \widehat{FBE}$$

$$S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2}.CE.CF.\sin \widehat{ECF}$$

- Xét dường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFBC$, có : $\widehat{EBF} = \widehat{ECF}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EF}$)

Nên $S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2}.CE.CF.\sin \widehat{FBE}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta GBF}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{\frac{1}{2}.BF.BG.\sin \widehat{FBE}}{\frac{1}{2}.CE.CF.\sin \widehat{FBE}} = \frac{BF.BG}{CE.CF} \quad (6)$$

- Trong (O), có : $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AI}$)

Hay $\widehat{FBK} = \widehat{ECG}$

- Xét ΔFBK và ΔECG, có :

$\widehat{FBK} = \widehat{ECG}$ (chứng minh trên)

$\widehat{BFK} = \widehat{CEG} = 90°$

$$\Rightarrow \Delta FBK \backsim \Delta ECG(g-g) \Rightarrow \frac{FB}{EC} = \frac{FK}{EG} \Rightarrow FB.EG = EC.FK$$

Ta có : $\frac{FK}{FC} + \frac{BF.BE}{CF.CE} = \frac{FK.CE + BF.BE}{CF.CE} = \frac{FB.EG + BF.BE}{CF.CE} = \frac{FB(EG+BE)}{CF.CE} = \frac{FB.BG}{CF.CE}$

$\Leftrightarrow \frac{FK}{FC} + \frac{BF.BE}{CF.CE} = \frac{S_{\Delta GBF}}{S_{\Delta CEF}}$ (theo (6))

$$\Leftrightarrow S_{\Delta GBF} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{BF.BE}{CF.CE}\right).S_{\Delta CEF}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2020-2021)*

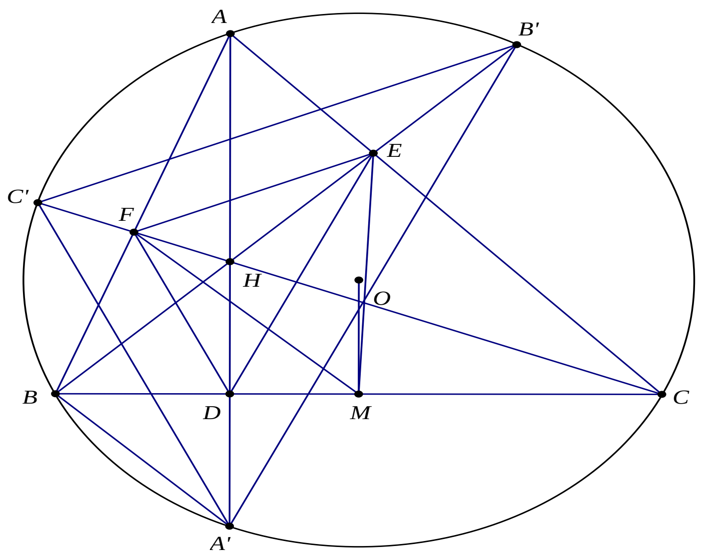
Câu 1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao $AD;BE;CF$ cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh bốn điểm $M;D;E;F$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AB \cdot BF + AC \cdot CE \leq 4R^2$.

c) Khi vị trí các đỉnh A,B,C thay đổi trên đường tròn (O), chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF không đổi.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm $M;D;E;F$ cùng thuộc một đường tròn.

Vì $BE;CF$ là đường cao nên $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC.

$\Rightarrow \widehat{ECF}=\widehat{EBF}=\frac{1}{2}\widehat{EMF}$ (1) (Góc nội tiếp và góc ở tâm)

Tứ giác $BDHF$ có $\widehat{BDH}+\widehat{BFH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên nội tiếp được $\Rightarrow \widehat{HBF}=\widehat{HDF}$ (2)

Tương tự, tứ giác $CDHE$ nội tiếp được $\Rightarrow \widehat{HCE}=\widehat{HDE}$ (3)

Từ $(1);(2);(3)$ $\Rightarrow \widehat{EDF}=\widehat{EDH}+\widehat{HDF}=\widehat{ECF}+\widehat{EBF}=2\cdot\frac{1}{2}\widehat{EMF}=\widehat{EMF}$

Từ $\widehat{EDF}=\widehat{EMF}\Rightarrow MDFE$ nội tiếp $\Rightarrow$ Bốn điểm $M;D;E;F$ cùng thuộc môt đường tròn.

b) Chứng minh: $AB\cdot BF+AC\cdot CE\le 4R^2$

Xét ΔABD và ΔCBF có $\hat{B}$ chung $\widehat{ADB}=\widehat{CFB}=90^\circ\Rightarrow \Delta ABD\sim\Delta CBF$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{BD}{BF}\Rightarrow AB\cdot BF=BC\cdot BD$ (4)

Tương tự $\Delta ACD\sim\Delta BCE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CE}\Rightarrow AC\cdot CE=BC\cdot CD$ (5)

Cộng $(4)(5)$ theo từng vế ta được: $AB.BF+AC.CE=BC(BD+DC)=BC^2$.

Vì $BC\le 2R$ nên ta có $AB.BF+AC.CE\le 4R^2$.

c) Khi vị trí các đỉnh A,B,C thay đổi trên đường tròn (O), chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔDEF không đổi

Gọi A',B',C' lần luợtt là giao điểm của các đường thẳng AD,BE,CF với (O).

Ta có: $\widehat{A'BC}=\widehat{A'AC}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{A'C}$)

$\widehat{EBC}=\widehat{A'AC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) $\Rightarrow \widehat{A'BC}=\widehat{EBC}$

$\Delta HBA'$ có $BD\perp HA';\widehat{A'BC}=\widehat{EBC}$ nên cân tại $B\Rightarrow BD$ là đường trung trục của $HA'\Rightarrow D$ là trung điểm của HA'

Tương tự có E; F là trung điểm của HB',HC'

Suy ra $\Delta DEF\sim\Delta A'B'C'$ theo ti số đồng dạng $k=\frac{1}{2}$.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF ta có:

$\frac{r}{R}=\frac{DE}{A'B'}=k=\frac{1}{2}\Rightarrow r=\frac{1}{2}R$ không đổi khi A,B,C thay đổi trên đường tròn (O).

Câu 17. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Nam đề dự bị năm 2020-2021)*

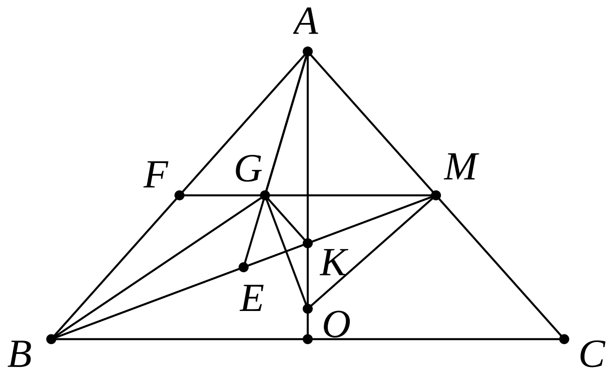
Cho tam giác ABC cân tại A $(AB<BC)$, M làtrung điểm của AC, G làtrọng tâm củatam giác ABM.

a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh OG vuông góc với BM.

b) Lấy điểm N trên cạnh BC sao cho $BN = BA$. Vẽ NK vuông góc với AB tại K, BE vuông góc với AC tại E, KF vuông góc với BC tại F. Tính tỉ số $\frac{BE}{KF}$

Lời giải

Câu 4a.



Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $AO \perp BC$, $OM \perp AC$

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BM, AB.

Gọi K là giao điểm của AO và BM nên K là trọng tâm của tam giác ABC

Suy ra $MK = \frac{1}{3}MB$ Mà $ME = \frac{1}{2}MB$

Nên $MK = \frac{2}{3}EM$

Ta lại có $AG = \frac{2}{3}AE$ (G là trọng tâm của tam giác ABM)

Nên $GK //$ AC Mà $OM \perp AC$

Do đó $GK \perp OM$ (1)

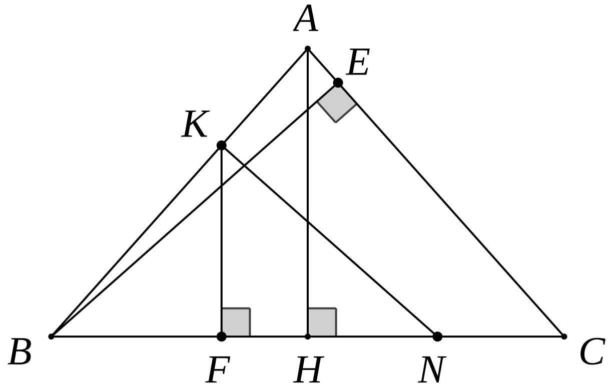
Mặt khác $AO \perp BC$ (cmt) và $MF // BC$ (MF là đường trung bình của tam giác ABC)

Nên $MF \perp AO$ hay $MG \perp OA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra K là trực tâm của tam giác OGM

Do đó $MK \perp GO$ hay $MB \perp OG$.

Câu 4b.



Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$)

Suy ra $BH = HC$ (ΔABC cân tại A)

Nên $S_{\Delta ABH} = S_{\Delta ACH} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$

Xét hai tam giác vuông ABH và BKN ta có:

$AB = BN$ (gt) ; ($\widehat{B}$ chung)

Do đó $\Delta ABH = \Delta NBK$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Theo gt, ta có: $AB = BN$ và $AB = AC$

Nên $BN = AC$

Ta có: $\frac{BE}{KF} = \frac{BE.AC}{KF.BN} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BKN}} = 2$

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Nam năm 2020-2021)*

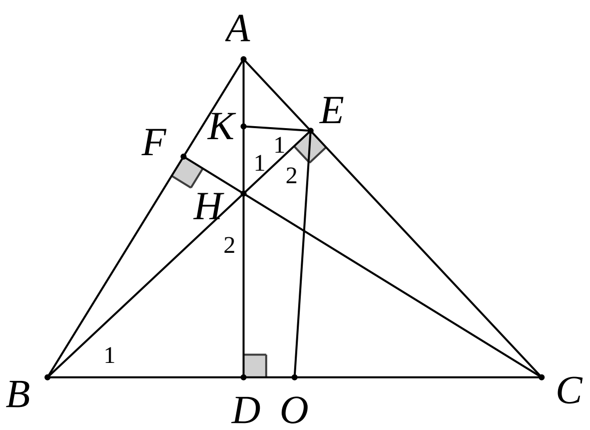
Cho tam giác nhọn ABC $(AB < BC)$, có ba đương cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại cắt AD tại K.

a) Chứng minh $KA = KE$.

b) Vẽ tiếp tuyến AM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM. Chứng minh O, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Câu 5a.



Gọi K' là trung điểm của cạnh huyền AH trong tam giác vuông AEH ($\widehat{E} = 90^\circ$)

Suy ra $K'E = K'A = K'H = \frac{AH}{2}$

Nên $\widehat{E_1} = \widehat{H_1}$

Mà $\widehat{H_2} = \widehat{H_1}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{H_2}$

Trong tam giác vuông BEC ($\widehat{E} = 90^\circ$), ta có: $OE = OB = OC = \frac{BC}{2}$

Nên $\widehat{E_2} = \widehat{B_1}$

Ta lại có: $\widehat{B_1} + \widehat{H_2} = 90°$

Hay: $\widehat{E_2} + \widehat{E_1} = 90°$

Suy ra $\widehat{K'EO} = 90°$

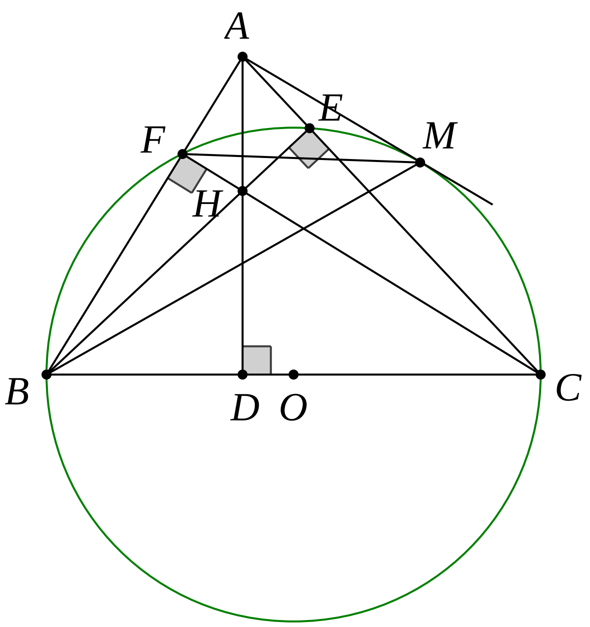
Hay: $K'E \perp EO$

Suy ra $K'E$ là tiếp tuyến của (O)

Suy ra: $K' \equiv K$

Do đó: $KA = KE$

Câu 5b.



Ta có: $\Delta ABD \backsim \Delta AHF$ ($\widehat{F} = \widehat{D} = 90°$, $\widehat{A}$ chung)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AD}{AF}$

$\Rightarrow AB.AF = AH.AD$ (1)

Ta có: $\Delta ABM \backsim \Delta AMF$ ($\widehat{AMF} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$), $\widehat{A}$ chung)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AM}{AF}$

$\Rightarrow AM^2 = AB.AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AM^2 = AH.AD$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AM} = \dfrac{AM}{AH}$

Ta có: $\Delta ADM \backsim \Delta AMH$ ($\dfrac{AD}{AM} = \dfrac{AM}{AH}$ (cmt), $\widehat{A}$ chung)

$\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{ADM}$ (3)

Dựng tiếp tuyến Mx tại M của (HDM)

$\Rightarrow \widehat{xMH} = \widehat{ADM}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $Mx \equiv MA$

Suy ra AM là tiếp tuyến của (HDM) tại M

$\Rightarrow AM \perp MI$

Mà $AM \perp MO$

$\Rightarrow M, O, I$ thẳng hàng.

Câu 19. *(Trường chuyên tỉnh Hậu Giang năm 2020-2021)*

Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm đối xứng của B qua O. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B lên AC và AO, với K khác O và thuộc đoạn thẳng AO. Gọi M là giao điểm của đường thẳng HK và BC.

1) Chứng minh bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một đường tròn.

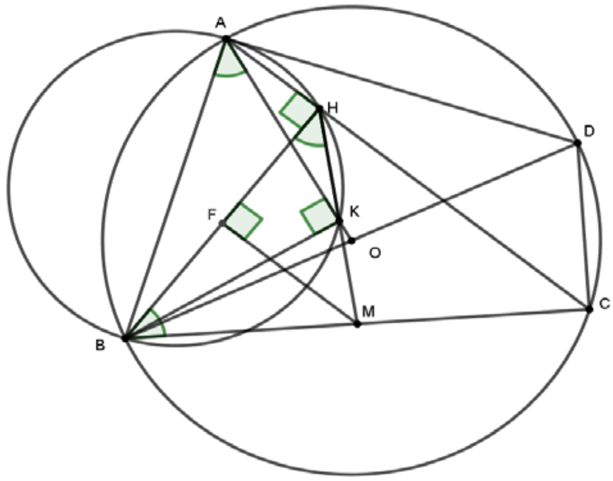
2) Chứng minh tam giác MHB cân.

3) Chứng minh M là trung điểm của BC.

4) Cho điểm E nằm bên ngoài đường tròn (O) và một đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua E, đồng thời cắt (O) tại hai điểm phân biệt P, Q. Giả sử bán kính đường tròn (O) bằng a. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OPQ theo a.

Lời giải

Hình vẽ thể hiện được đầy đủ giả thiết.



a) Ta có $\widehat{AHB} = \widehat{AKB} = 90^0$ nên tứ giác $ABKH$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AB. Do đó, bốn điểm A, B, K, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có $\widehat{BAK} = \widehat{BAO} = \widehat{BHK} = \widehat{BHM}$ (1) ; $\widehat{ABH} = \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (2) và $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra $\widehat{MBH} = \widehat{BHM}$.

Suy ra ΔMBH cân tại M.

c) Gọi F là trung điểm của BH. Do ΔMBH cân tại M nên $MF \perp BH$.

Mặt khác, ta có $BH \perp HC$. Suy ra $MF // HC$.

Suy ra $\dfrac{BF}{BH} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra M là trung điểm của BC.

d) Kẻ đường cao $QI, I \in PO$.

Ta có $S = \frac{1}{2}.OP.QI = \frac{1}{2}a.QI \le \frac{1}{2}a.QO = \frac{1}{2}a^2$.

$S = \frac{1}{2}a^2$ khi và chỉ khi $I \equiv O$ hay tam giác OPQ vuông tại O (tam giác OPQ luôn tồn tại vì luôn tồn tại hai điểm P và Q thuộc (O) sao cho $\widehat{POQ} = 90^0$ và đường thẳng PQ đi qua điểm E).

Vậy $S_{\max} = \frac{1}{2}a^2$ là diện tích lớn nhất của tam giác OPQ.

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2020-2021)*

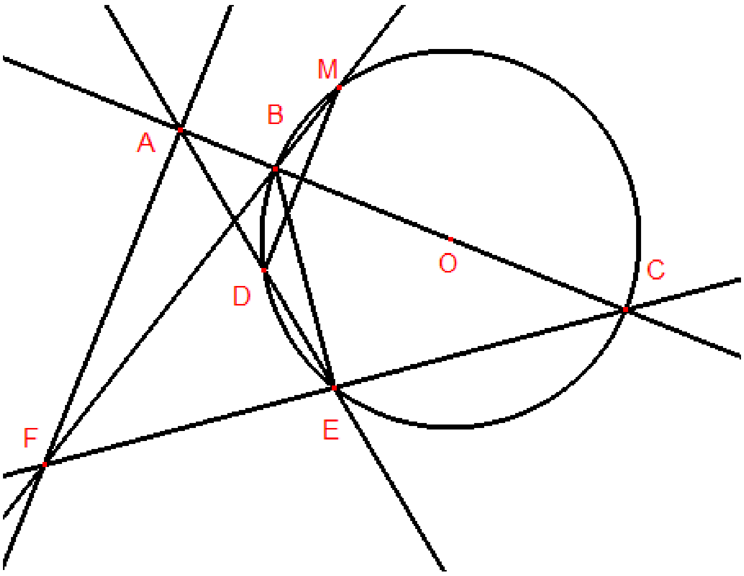
Cho đường tròn *(O)*, từ điểm *A* ngoài đường tròn vẽ đường thẳng *AO* cắt đường tròn *(O)* tại *B* và *C* $(AB < AC)$. Qua *A* vẽ đường thẳng không đi qua tâm *O* cắt đường tròn tại *D* và *E* $(AD < AE)$. Đường thẳng vuông góc với *AB* tại *A*, cắt đường thẳng *CE* tại *F*.

a) Chứng minh rằng tứ giác *ABEF* nội tiếp đường tròn.

b) Gọi *M* là giao điểm thứ hai của *FB* với đường tròn *(O)*, chứng minh $DM \perp AC$.

c) Chứng minh: $CE.CF + AD.AE = AC^2$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{FAB} = 90^o$, Vì $AF \perp AB$, $\widehat{BEC} = 90^o$

tứ giác *ABEF* có $\widehat{FAB} + \widehat{BEF} = 180^o$

Suy ra tứ giác *ABEF* nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{AFB} = \widehat{AEB}$ bằng $\frac{1}{2}$sđ cung $\overset{\frown}{AB}$ (của đường tròn ngoại tiếp tứ giác *ABEF*)

Mặt khác $\widehat{AEB} = \widehat{BMD}$ bằng $\frac{1}{2}$sđ cung $\overset{\frown}{BD}$ (của đường tròn tâm O)

Do đó $\widehat{AFB} = \widehat{BMD} \Rightarrow AF // DM$ mà $AF \perp AC \Rightarrow DM \perp AC$.

c) Xét tam giác ACF và tam giác ECB

$\Delta ACF \sim \Delta ECB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{CE} = \dfrac{CF}{BC} \Rightarrow CE.CF = AC.BC \;\; (1)$

$\Delta ABD \sim \Delta AEC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD.AE = AB.AC \;\; (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow AD.AE + CE.CF = AC(AB+BC) = AC^2.$

Vậy $CE.CF + AD.AE = AC^2$ *(đpcm)*

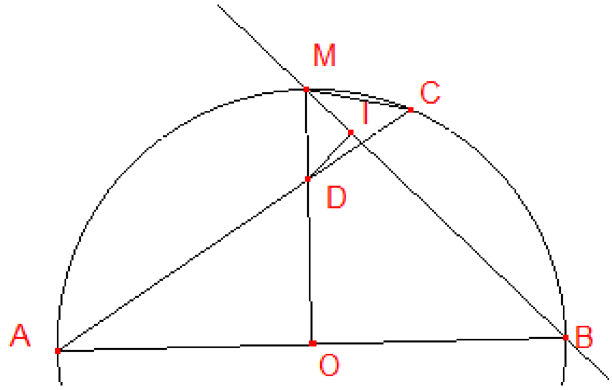
Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2020-2021)*

Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB*. *M* là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$, *C* là một điểm trên nửa đường tròn. *AC* cắt *MO* tại *D*. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MCD* luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi *C* di động trên nửa đường tròn.

Lời giải

Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MDC*, xảy ra hai khả năng

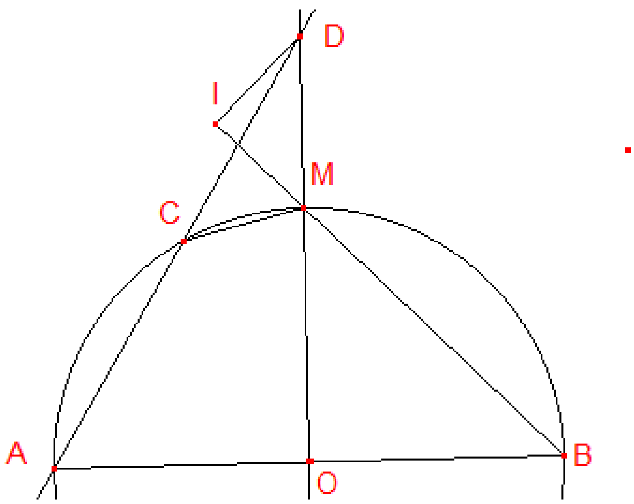
Trường hợp 1. Điểm *C* nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$



Ta có $\widehat{MID} = 2.\widehat{MCD} = 90^{\circ}$.

Lại có $IM = ID$ nên tam giác *MID* vuông cân tại *I*, do đó $\widehat{DMI} = 45^{\circ}$, hay $\widehat{OMI} = 45^{\circ} = \widehat{OMB}$. Suy ra *M, I, B* thẳng hàng nên *I* thuộc *BM* cố định

Trường hợp 2. Điểm *C* nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AM}$



Tương tự ta có $\widehat{MID} = 2.\widehat{MCD} = 90^o$. Mà $IM = ID$ nên tam giác MID vuông cân tại I, do đó $\widehat{DMI} = 45^o \Rightarrow \widehat{IMO} = 135^o$.

Mặt khác $\widehat{OMB} = 45^o$ nên $\widehat{IMB} = \widehat{IMO} + \widehat{OMB} = 180^o$.

Suy ra ba điểm *I, M, B* thẳng hàng, hay *I* thuộc *BM* cố định.

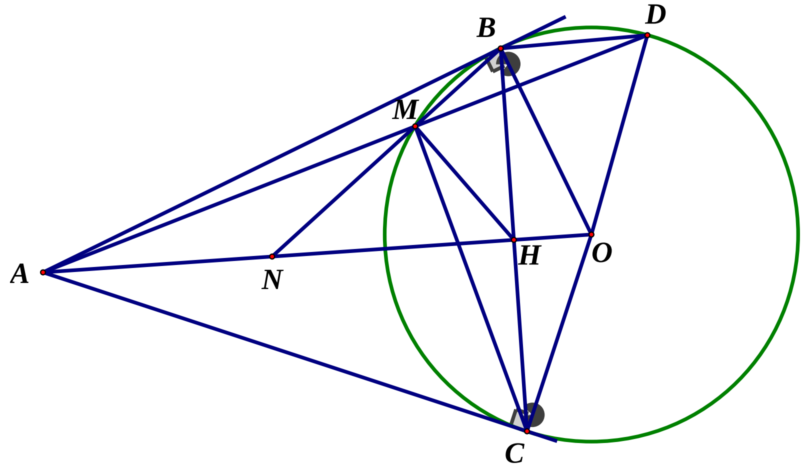
Câu 22. *(Trường chuyên Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho đường tròn (O), từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC. Vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại M khác D.

a) Chứng minh tam giác AMB và tam giác ABD đồng dạng.

b) Gọi N là giao điểm của BM và AO. Chứng minh $NH^2 = NM.NB$.

Lời giải



a) Xét tam giác AMB và tam giác ABD có:

$$\widehat{ABM} = \widehat{ADB}\left(\text{cùng bằng } \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right)$$

$\widehat{A}$ chung

Do đó tam giác AMB và tam giác ABD đồng dạng (g-g)

b) Xét tam giác ABO vuông tại B, đường cao BH có : $AB^2 = AH.AO$ (1)

Mặt khác ta có hai tam giác ABM và ADB đồng dạng (g-g) suy ra

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AB^2 = AM.AD \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH.AO = AM.AD$ suy ra hai tam giác AMH và AOD đồng dạng. Do đó $\widehat{MHN} = \widehat{MDC}$

Mặt khác $\widehat{MDC} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MC}$) suy ra $\widehat{MHN} = \widehat{MBH}$

Xét hai tam giác NHM và NBH có:

$\widehat{MHN} = \widehat{MBH}$, $\widehat{MNH}$ chung, suy ra hai tam giác NHM và NBH đồng dạng

Do đó $\dfrac{NH}{NB}=\dfrac{NM}{NH}\Rightarrow NH^2=NB.NM$.

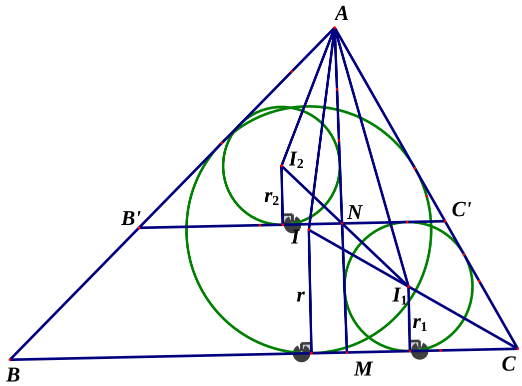
Câu 23. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho đường tròn (I,r) nội tiếp tam giác ABC. Điểm M thuộc cạnh BC với $M\neq B,\ M\neq C$. Đường tròn (I_1,r_1) nội tiếp tam giác AMC. Đường thẳng song song với BC, tiếp xúc với đường tròn (I_1,r_1) cắt các cạnh $AB,\ AC$ lần lượt tại $B',\ C'$. Gọi N là giao điểm của AM với $B'C'$, đường tròn (I_2,r_2) nội tiếp tam giác $AB'N$. Chứng minh:

a) Bốn điểm $A,\ I,\ I_1,\ I_2$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) $r=r_1+r_2$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AI_2N}=\widehat{AI_2I_1}=180^0-\dfrac{\widehat{ANB'}+\widehat{B'AN}}{2}=180^0-\dfrac{180^0-\widehat{AB'N}}{2}=90^0+\dfrac{\widehat{AB'N}}{2}$.

Mà $B'C'//BC$ suy ra $\widehat{AB'N}=\widehat{ABC}$ suy ra $\widehat{AI_2I_1}=90^0+\dfrac{\widehat{ABC}}{2}$ (1)

Tương tự ta có $\widehat{AIC}=\widehat{AII_1}=90^0+\dfrac{\widehat{ABC}}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AI_2I_1}=\widehat{AII_1}$ do đó bốn điểm $A,\ I_2,\ I,\ I_1$ cùng nằm trên một đường tròn.

Chú ý : Ra một trong hai nội dung ở (1) hoặc (2) cho 0,5 điểm.

b) Xét tam giác AI_2I_1 và AIC có :

$\widehat{I_2AI_1}=\widehat{IAC}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2};\ \widehat{AI_2I_1}=\widehat{AIC}$ do đó hai tam giác AI_2I_1 và tam giác AIC đồng dạng.

Suy ra : $\dfrac{I_2I_1}{IC}=\dfrac{AI_1}{AC}$ $(*)$

Xét tam giác ANI_1 và AI_1C có :

$\widehat{NAI_1}=\widehat{CAI_1};\ \widehat{AI_1N}=\widehat{ACI_1}$ do đó hai tam giác ANI_1 và tam giác AI_1C đồng dạng.

Suy ra $\dfrac{I_1N}{CI_1}=\dfrac{AI_1}{AC}$ $(**)$

Từ (*) và (**) suy ra

$\dfrac{I_1I_2}{IC}=\dfrac{I_1N}{CI_1}\Rightarrow\dfrac{CI_1}{CI}=\dfrac{I_1N}{I_1I_2}$

$\Rightarrow\dfrac{r_1}{r}=\dfrac{r_1}{r_1+r_2}\Rightarrow r=r_1+r_2.$

(Do $\dfrac{I_1N}{I_2N}=\dfrac{r_1}{r_2}$ suy ra $\dfrac{I_1N}{I_1I_2}=\dfrac{r_1}{r_1+r_2}$)

Vậy $r=r_1+r_2$.

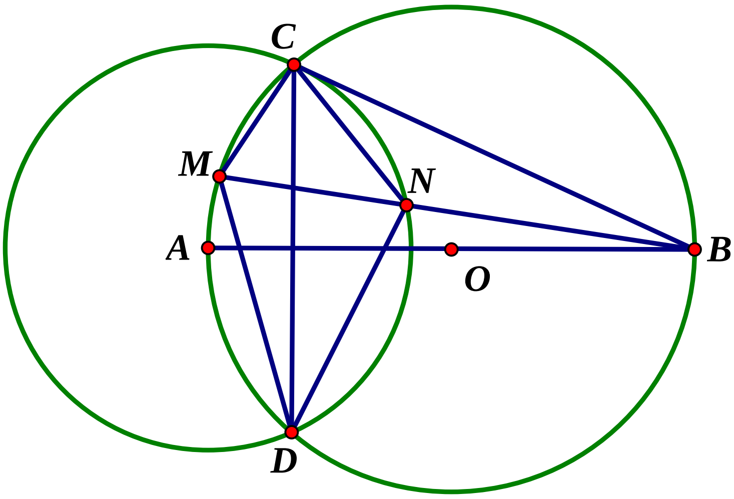
Câu 24. *(Trường chuyên tin Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB.$ Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt $C, D.$ Trên đường tròn (O), lấy điểm M nằm trên cung nhỏ AC với $M\neq A, M\neq C.$ Đoạn thẳng BM cắt đường tròn (A) tại điểm N. Chứng minh :

a) $\widehat{CMB}=\widehat{DMB}.$

b) $MN^2=MC.MD.$

Lời giải



a) Ta có AB là đường trung trực của CD suy ra trên (O) có $\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{DB}.$

Do đó $\widehat{CMB}=\widehat{DMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau) (1)

b) Ta có : $\widehat{CNM}=\widehat{CBM}+\widehat{NCB}=\widehat{CDM}+\widehat{NCB}$

Mặt khác ta có $\widehat{ACB}=90^0$ (chắn nửa đường tròn) suy ra BC là tiếp tuyến của (A)

Do đó $\widehat{NCB}=\widehat{CDN}\Rightarrow\widehat{CNM}=\widehat{CDM}+\widehat{CDN}=\widehat{MDN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác MNC và tam giác MDN đồng dạng (g-g).

Suy ra $\dfrac{MN}{MD}=\dfrac{MC}{MN}\Rightarrow MN^2=MC.MD.$

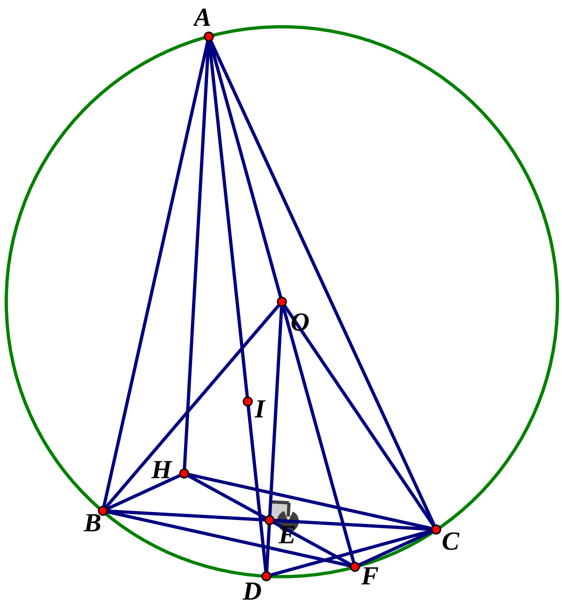
Câu 26. *(Trường chuyên tin Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi H, I lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

a) Chứng minh $\widehat{HAI}=\widehat{OAI}$.

b) Cho $\widehat{BAC}=30^0$, tính độ dài đoạn thẳng AH theo R.

Lời giải



a) Kẻ AI cắt (O) tại D suy ra D là điểm chính giữa cung $\overset\frown{BC}$ hay OD là đường trung trực của BC. Gọi OD cắt BC tại E, khi đó E là trung điểm của BC

Ta có ΔAOD cân tại O suy ra $\widehat{OAD}=\widehat{ODA}$ (1).

Mặt khác ta có $AH//OD$ (cùng vuông góc với AB) suy ra $\widehat{HAD}=\widehat{ODA}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OAD}=\widehat{HAD}.$

b) Kẻ đường kính AF của đường tròn (O) suy ra $\widehat{ACF}=\widehat{ABF}=90^0$ (chắn nửa đường tròn).

Xét tứ giác $BHCF$ có $\begin{cases} BH//CF \text{ (cùng vuông góc với } AC) \\ CH//BF \text{ (cùng vuông góc với } AB) \end{cases}$ suy ra $BHCF$ là hình bình hành hay E là trung điểm của HF.

Xét ΔAHF có OE là đường trung bình nên suy ra $AH=2OE$ $(*)$.

Mặt khác theo đề bài ta có: $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=60^0$ suy ra tam giác BOC đều

Khi đó $OE=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $AH = R\sqrt{3}$.

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2020-2021)*

Từ một điểm *A* ở bên ngoài đường tròn (*O*) kẻ các tiếp tuyến *AB*, *AC* và cát tuyến *ADE* với đường tròn (*B*, *C* là các tiếp điểm, $AD < AE$, $\overset{\frown}{DB} < \overset{\frown}{DC}$). Qua điểm *O* kẻ đường thẳng vuông góc với *DE* tại *H*, đường thẳng này cắt đường thẳng *BC* tại *K*. Chứng minh:

a. Tứ giác *BCOH* nội tiếp;

b. *KD* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*);

c. $\widehat{DBC} = \widehat{HBE}$.

Lời giả

a. Chỉ ra $\widehat{ABO} = \widehat{AHO} = \widehat{ACO} = 90^0 \Rightarrow$ 5 điểm *A, B, O, C* cùng thuộc đường tròn đường kính *AO* $\Rightarrow$ tứ giác *BCOH* nội tiế

b.Tứ giác *BCOH* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CHO} = \widehat{CBO}$. $\Delta\, OBC$ cân $\Rightarrow \widehat{CBO} = \widehat{BCO} \Rightarrow \widehat{OHC} = \widehat{OCK}$. Δ *OHC* và $\Delta\, OCK$ có $\widehat{OHC} = \widehat{OCK}$, $\hat{O}$ chung $\Rightarrow \Delta\, OHC \backsim \Delta\, OCK$

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OC} = \dfrac{OC}{OK} \Rightarrow OH.OK = OC^2$

mà $OC = OD \Rightarrow OH.OK = OD^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OD} = \dfrac{OD}{OK}$

$\Delta\, OHD$ và $\Delta\, ODK$ có $\dfrac{OH}{OD} = \dfrac{OD}{OK}$, $\hat{O}$ chung $\Rightarrow \Delta\, OHD \backsim \Delta\, ODK$

$\Rightarrow \widehat{ODK} = \widehat{OHD} = 90^0 \Rightarrow$ *KD* là tiếp tuyến của (*O*)

c. Tứ giác *BCOH* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HOC}$, $\widehat{BHK} = \widehat{BCO}$, theo ý b có $\widehat{BCO} = \widehat{OHC}$

$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{OHC}$.

$\Delta\, OHC$ và $\Delta\, BHK$ có $\widehat{HBK} = \widehat{HOC}; \widehat{BHK} = \widehat{OHC} \Rightarrow \Delta\, BHK \backsim \Delta\, OHC \Rightarrow$

$\dfrac{HO}{HB} = \dfrac{HC}{HK} \Rightarrow HB.HC = HO.HK$

$\Delta\, ODK$ vuông tại *D*, đường cao *DH* $\Rightarrow HO.HK = HD^2$,

lại có $OH \perp DE \Rightarrow HD = HE \Rightarrow HB.HC = HE^2 \Rightarrow \dfrac{HE}{HC} = \dfrac{HB}{HE}$

$\widehat{BHK} = \widehat{OHC}$, $\widehat{KHE} = \widehat{OHE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{CHE}$

$\Delta\, BHE$ và $\Delta\, EHC$ có $\dfrac{HE}{HC} = \dfrac{HB}{HE}$ và $\widehat{BHE} = \widehat{CHE} \Rightarrow \Delta\, BHE \backsim \Delta\, EHC \Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{HEC}$

Lại có $\widehat{DEC} = \widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (*O*) cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{HBE}$.

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình năm 2020-2021)*

Cho tam giác đều ABC cố định nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt cung nhỏ AB tại E (E không trùng với hai điểm A và B). Đường thẳng d cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Gọi F là giao điểm của MC và BN. Chứng minh rằng:

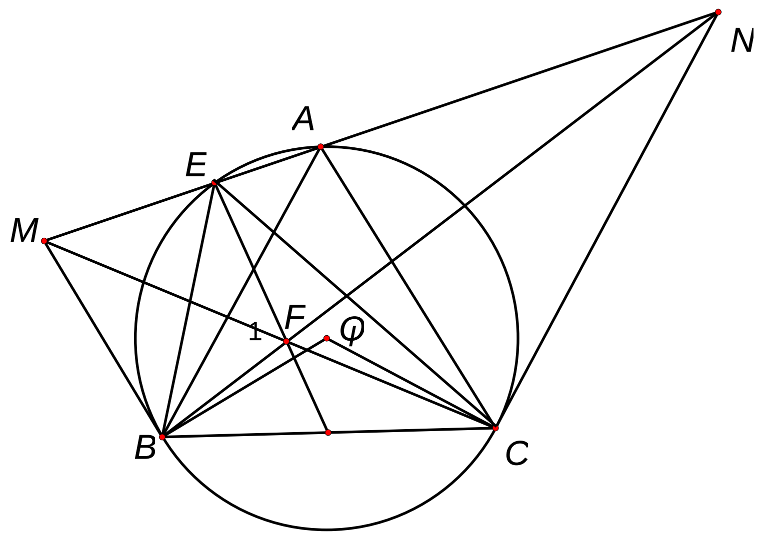
a) ΔCAN đồng dạng với ΔBMA, ΔMBC đồng dạng với ΔBCN.

b) Bốn điểm B, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi.

Lời giải

Hình vẽ:



a) Ta có $BM \perp OB$ **(vì** BM **là tiếp tuyến của** (O)**) và** $AC \perp OB$ **(do** OB **là đường cao của tam giác** ABC**)** $\Rightarrow AC \parallel BM$

$\Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{CAN}$ **(hai góc đồng vị)**

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$AB \parallel CN \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CNA}$ (hai góc đồng vị)

Suy ra $\Delta CAN \backsim \Delta BMA$ (g.g).

Suy ra: $\dfrac{MB}{AC} = \dfrac{AB}{NC} \Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{BC}{CN}$

Mặt khác $\widehat{MBC} = \widehat{BCN} = 120^0 \left(= \dfrac{1}{2} \text{sđ}\, \overset{\frown}{BAC} \right)$

Suy ra $\Delta MBC \backsim \Delta BCN$ (c.g.c).

b) Ta có $\widehat{BFM} = \widehat{BCM} + \widehat{NBC} = \widehat{BCM} + \widehat{CMB} = 180^0 - \widehat{MBC} = 60^0$.

Mặt khác $\widehat{BEM} = \widehat{BCA} = 60^0$ (do t/c góc ngoài của tứ giác nội tiếp).

Suy ra $\widehat{BFM} = \widehat{BEM} = 60^0$.

Vì hai đỉnh kề E và F cùng nhìn cạnh BM dưới một góc bằng 60^0 nên bốn điểm B, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Gọi I là giao điểm EF với BC.

Ta có $\widehat{IBF} = \widehat{BMF}$ ($\Delta MBC \backsim \Delta BCN$)

$\widehat{BMF} = \widehat{BEF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$ của đường tròn $(BMEF)$)

Suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{IBF}$ hay $\widehat{BEI} = \widehat{IBF}$.

Xét ΔEBI và ΔBFI có $\widehat{BEI} = \widehat{IBF}$ (chứng minh trên) và $\widehat{I_1}$ chung

Suy ra $\Delta EBI \backsim \Delta BFI\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{IE}{IB} = \dfrac{IB}{IF} \Rightarrow IB^2 = IE.IF\ \ (1)$

Chứng minh tương tự ta có $\Delta CFI \backsim \Delta ECI\,(g.g) \Rightarrow IC^2 = IE.IF\ \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $IB^2 = IC^2 \Rightarrow IB = IC \Rightarrow I$ là trung điểm của BC

Mà BC cố định nên I cố định. Vậy EF luôn đi qua điểm cố định là I.

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Cho tam giác ABC vuông ở $A\,(AB > AC)$ có đường cao $AH\,(H \in BC)$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn (O_1) đường kính BH cắt AB tại I (I khác B) và nửa đường tròn (O_2) đường kính HC cắt AC tại K (K khác C). Chứng minh rằng:

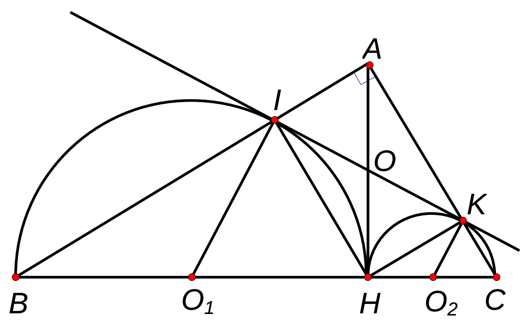
a) Tứ giác $AKHI$ là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $BIKC$ là tứ giác nội tiếp.

c) IK là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2).

Lời giải

Hình vẽ



a) Ta có: $\widehat{BIH} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O_1))

$\Rightarrow \widehat{AIH} = 90^0$ (vì hai góc kề bù) (1)

Tương tự $\widehat{HKC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HKA} = 90^0$ (2)

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{IAK} = 90^0$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác $AKHI$ là hình chữ nhật

Vì tứ giác $AKHI$ là hình chữ nhật nên nội tiếp được trong một đường tròn $\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IKA}$ (góc nội tiếp chắn cung IA) (4)

b) Theo giả thiết $AH \perp BC$ nên AH là tiếp tuyến của đường tròn (O_1)

$\Rightarrow \widehat{IBH} = \widehat{IHA}$ (cùng chắn cung IH của đường tròn (O_1)) (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{IBH} = \widehat{IKA}$ (6)

Ta cũng có $\widehat{IKA} + \widehat{IKC} = 180^0$ (hai góc kề bù) (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{IBH} + \widehat{IKC} = 180^0$

$\Rightarrow BIKC$ là tứ giác nội tiếp

c) Gọi *O* là giao điểm của *IK* và *AH*

Tứ giác *AIHK* là hình chữ nhật $\Rightarrow \Delta OIH$ là tam giác cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OIH} = \widehat{OHI}$

Tam giác O_1IH cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{O_1IH} = \widehat{O_1HI}$

Mà $\widehat{OHI} + \widehat{O_1HI} = 90^0$ suy ra $\widehat{O_1IH} + \widehat{OIH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{O_1IK} = 90^0$

Do đó IK là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O_1)

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{O_2KI} = 90^0$ nên IK là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O_2)

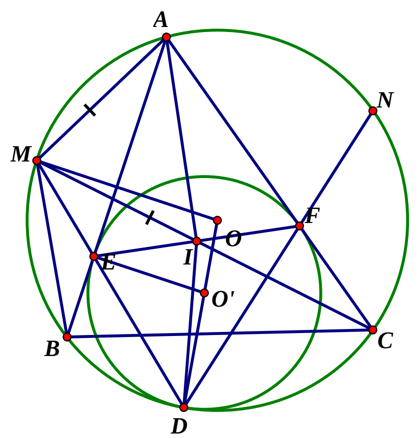
Vậy IK là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2)

Câu 30. *(Trường chuyên Quảng Trị năm 2020-2021)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung AB không chứa C và I là điểm trên đoạn MC sao cho $MI = MA$.

1. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
2. Vẽ đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại D và tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại E, F .
    a. Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng.
    b. Chứng minh tứ giác $DIFC$ nội tiếp.

Lời giải



1) Ta có $MA = MI$ nên $\angle MAI = \angle MIA$

Mặt khác $\angle MAI = \angle MAB + \angle BAI$; $\angle MIA = \angle MCA + \angle IAC$

Mà $\angle MAB = \angle MCA$ nên $\angle BAI = \angle IAC$

Suy ra AI, CI là các phân giác trong tam giác ABC nên I là tâm đường tròn nội tiếp.

2a) Ta có D, O, O' thẳng hàng và $OM // O'E$ vì cùng vuông góc AB nên $\angle MOD = \angle EO'D$

Do đó $2\angle ODM = 2\angle ODE \Rightarrow \angle ODM = \angle ODE$. Suy ra M, E, D thẳng hàng

2b) $\Delta MEB \sim \Delta MBD \Rightarrow MB^2 = ME.MD \Rightarrow MI^2 = ME.MD \Rightarrow \Delta MEI \sim \Delta MID$

Suy ra $\angle MIE = \angle MDI$.

Gọi N là điểm chính giữa cung AC không chứa B.

Chứng minh tương tự $\angle NIF = \angle NDI$

Từ đó suy ra $\angle EIM + \angle MIN + \angle NIF = \angle MDN + \angle MIN = 180^o$. Do đó E, I, F thẳng hàng.

Khi đó $\angle ICD = \frac{1}{2}\angle MOD = \frac{1}{2}\angle EO'D = \angle EFD = \angle IFD$. Suy ra tứ giác $IFDC$ nội tiếp.

Câu 31. *(Trường chuyên Nghệ An dự bị năm 2020-2021)*

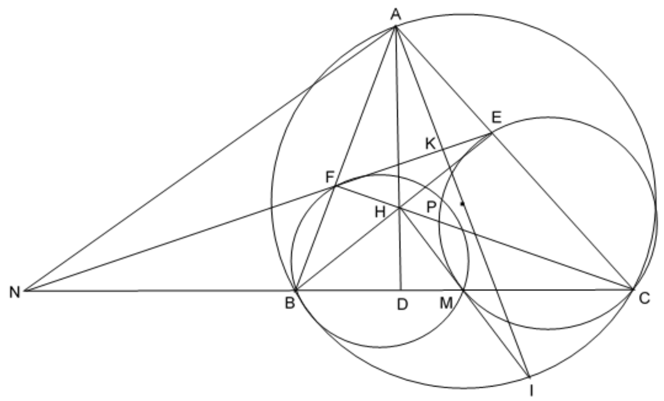
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường kính AI của đường tròn (O) cắt đường thẳng EF tại điểm K và đường thẳng HI cắt đường thẳng BC tại điểm M.

a) Chứng minh $MB = MC$ và tứ giác $DMEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $HK.BC = DI.EF$.

c) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CME tại điểm P (P khác M). Chứng minh $NP \perp AM$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ACI} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow IC \perp AC$

$\Rightarrow IC \parallel BH$

Tương tự: $HC \parallel BI$, do đó tứ giác BHCI là hình bình hành nên M là trung điểm BC.

Ta có: $\widehat{BEM} = \widehat{MBE}$ (do tam giác MBE cân tại M), mà $\widehat{DAC} = \widehat{MBE}$

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BEM}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{BAD} = \widehat{HEF}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{HEF} + \widehat{BEM} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{MEF}$

$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{MEF}$ (do $\widehat{BAC} = \widehat{BDF}$) nên tứ giác DMEF nội tiếp.

b) Vì $\widehat{ABC} = \widehat{AIC} = \widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^0 - \widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{AIC} = \widehat{IAC}$

$\Rightarrow 90^0 = \widehat{BAD} + \widehat{ABC} = \widehat{IAC} + \widehat{AEF}$ nên tam giác KAE vuông tại K

$\Rightarrow OA \perp$ EF

Ta có: $AK.AI = AE.AC = AH.AD$ suy ra tứ giác HKID nội tiếp

$\Rightarrow \Delta AKH \sim \Delta ADI \Rightarrow \dfrac{HK}{DI} = \dfrac{AK}{AD}$ (3)

Vì $\Delta AKE \sim \Delta ADB \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AK}{AD} \Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AK}{AD}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{HK}{DI} = \dfrac{EF}{BC} \Rightarrow HK.BC = DI.EF$

c) Nối AN cắt đường tròn (O) tại điểm Q, ta có: $NQ.NA = NB.NC = NF.NE = ND.NM$ suy ra tứ giác QAEF nội tiếp và tứ giác AQDM nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AQM} = \widehat{ADM} = 90^0$

Mà tứ giác AEHF nội tiếp nên tứ giác QAEH nội tiếp suy ra $\widehat{AQH} = 90^0$

Vậy ba điểm M, H, Q thẳng hàng suy ra H là trực tâm tam giác ANM $\Rightarrow NH \perp AM$ (5)

Gọi $P' = AM \cap (BMF) \Rightarrow AP'.AM = AF.AB = AE.AC$ nên EP'MC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow P' \in (MEC) \Rightarrow P' \equiv P \Rightarrow$ ba điểm A, P, M thẳng hàng $\Rightarrow AP.AM = AE.AC = AH.AD$ nên tứ giác HPMD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HPM} = 90^0 \Rightarrow HP \perp AM$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra ba điểm N, H, P thẳng hàng $NP \perp AM$

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2020-2021)*

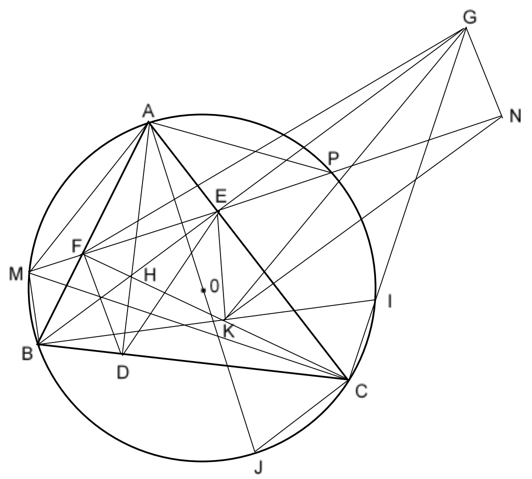
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

a) Chứng minh BC là đường phân giác ngoài của tam giác DEF.

b) Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn (O) (M nằm trên cung nhỏ AB); O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME. Chứng minh $AM \perp O_1O_2$.

c) Lấy điểm K trên đoạn thẳng HC (K khác H và C), đường thẳng BK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I và đường thẳng CI cắt đường thẳng BE tại điểm G. Chứng minh hệ thức $S_{\Delta GFB} = \left(\dfrac{FK}{FC} + \dfrac{BF.BE}{CF.CE}\right) S_{\Delta CEF}$. (Trong đó $S_{\Delta GFB}$ là diện tích tam giác GFB, $S_{\Delta CEF}$ là diện tích tam giác CEF).

Lời giải



a) Ta có tứ giác DCAF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{FCA}$

tứ giác DHEC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FCA} = \widehat{EDH}$

$\Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{EDH}$

$\Rightarrow$ DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$

Mà $AD \perp BC$

Do đó BC là đường phân giác ngoài của tam giác DEF

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của EF với đường tròn (O) và AJ đường kính của đường tròn (O). Ta có $\widehat{AJC} = \widehat{ABD}$ và $90^0 = \widehat{CAJ} + \widehat{AJC} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{CAJ} = \widehat{BAD}$

Mà $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{CAJ} + \widehat{AEF} = \widehat{BAD} + \widehat{ABC} = 90^0 \Rightarrow EF \perp AJ$

$\Rightarrow \widehat{MA} = \widehat{AP} \Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{MAP} = \widehat{ACM} \Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC.

Chứng minh tương tự ta có MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF

$\Rightarrow MA \perp O_1O_2$

c) Ta có $\dfrac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta CEF}} = \dfrac{BF.BE}{CF.CE}$ và $\dfrac{S_{\Delta KEF}}{S_{\Delta CEF}} = \dfrac{FK}{FC}$

$$\Rightarrow \left(\frac{FK}{FC} + \frac{BF.BE}{CF.CE}\right)S_{\Delta CEF} = \left(\frac{S_{\Delta KEF}}{S_{\Delta CEF}} + \frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta CEF}}\right)S_{\Delta CEF} = S_{\Delta KEF} + S_{\Delta BEF} \quad (1)$$

Ta có $S_{\Delta GFB} = S_{\Delta GEF} + S_{\Delta BEF}$ (2)

Qua K kẻ đường thẳng song song với BE cắt EF tại N, theo hệ quả của định lý Ta-lét ta có

$\dfrac{EH}{HF} = \dfrac{KN}{KF}$ (3)

Mà $\Delta EHC \sim \Delta FHB(g.g)$ và $\Delta FBK \sim \Delta ECG(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{EH}{FH} = \dfrac{EC}{FB} = \dfrac{EG}{FK}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{KN}{KF}=\dfrac{EG}{KF} \Rightarrow KN=EG$ nên tứ giác EGNK là hình bình hành $\Rightarrow$ EF đi qua trung điểm của KG $\Rightarrow S_{\Delta GEF}=S_{\Delta EKF}$ (5)

Từ (1); (2) và (5) suy ra đpcm.

Câu 33. *(Trường chuyên Hải Phòng năm 2020-2021)*

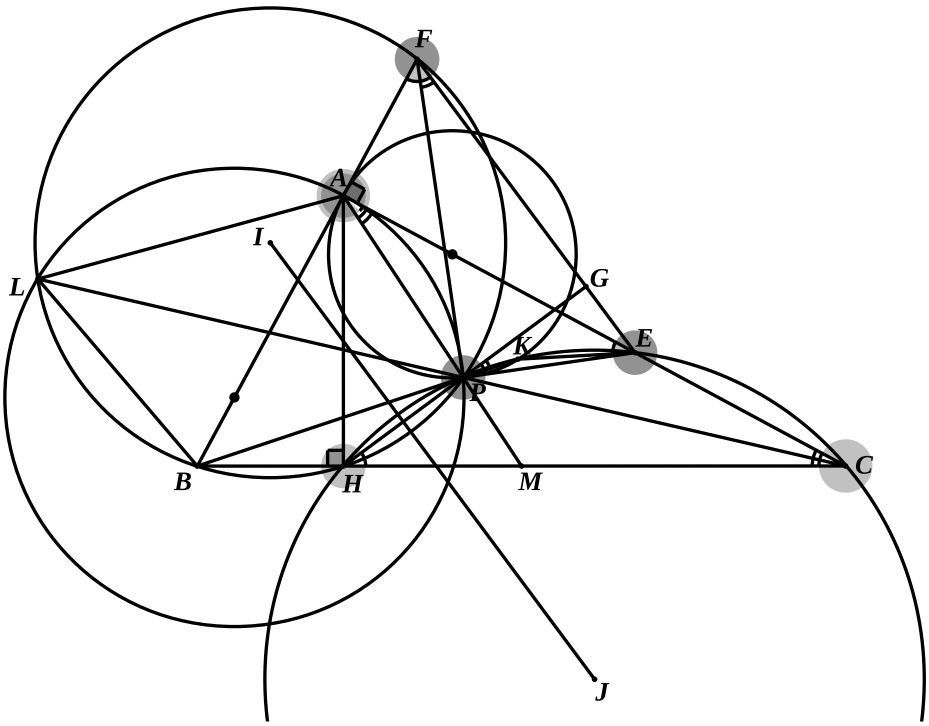
Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* (*AB* < *AC*), *M* là trung điểm cạnh *BC*. *P* là một điểm di động trên đoạn *AM* (*P* khác *A* và *M*). Đường tròn đi qua *P*, tiếp xúc với đường thẳng *AB* tại *A*, cắt đường thẳng *BP* tại *K* (*K* khác *P*). Đường tròn đi qua *P*, tiếp xúc với đường thẳng *AC* tại *A*, cắt đường thẳng *CP* tại *L* (*L* khác *P*).

a) Chứng minh $BP.BK+CP.CL=BC^2$.

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác *PKC* luôn đi qua hai điểm cố định.

c) Gọi *J* là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *PKC* và *E* là giao điểm thứ hai của đường tròn này với đường thẳng *AC*. Gọi *I* là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *PLB* và *F* là giao điểm thứ hai của đường tròn này với đường thẳng *AB*. Chứng minh *EF* // *IJ*.

Lời giải



Đáp án cho trường hợp hình vẽ trên, các trường hợp khác chứng minh tương tự.

a) (1,0 điểm)

BA là tiếp tuyến của đường tròn (*APK*) nên $BA^2=BP.BK\ (1)$

CA là tiếp tuyến của đường tròn (*APL*) nên $CA^2=CP.CL\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BP.BK+CP.CL=BA^2+CA^2=BC^2$

b) (1,0 điểm)

Gọi AH là đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow BA^2=BH.BC\ (3)$

Từ (1) và (3) $\Rightarrow BP.BK=BH.BC$. Suy ra tứ giác *HPKC* nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác *PKC* đi qua hai điểm cố định là *C* và *H*.

c) (1,0 điểm)

Theo câu b) đường tròn (*J*) đi qua *H*. Chứng minh tương tự (*I*) đi qua *H*.

(*I*) và (*J*) cắt nhau tại *H*, *P* nên $IJ \perp HP$ (4)

$HPEC\ nt \Rightarrow \widehat{AEP} = \widehat{PHC}$ (5)

$HPFB\ nt \Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{PHC}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra tứ giác *APEF* nội tiếp nên

$\Rightarrow \widehat{EPF} = \widehat{EAF} = 90^0 \Rightarrow PE \perp PF$

Gọi *G* là giao điểm của *HP* và *EF*. Do các tứ giác *HPEC* và *APEF* nội tiếp nên

$\widehat{GPE} = \widehat{HCE} = \widehat{MCA} = \widehat{MAC} = \widehat{PAE} = \widehat{PFE}$

$\Rightarrow \widehat{GPE} + \widehat{GEP} = \widehat{PFE} + \widehat{GEP} = 90^0 \Rightarrow PG \perp EF\ \ hay\ \ HP \perp EF$ (7)

Từ (4), (7) suy ra *IJ* // *EF*.

Câu 34. *(Trường chuyên tin tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

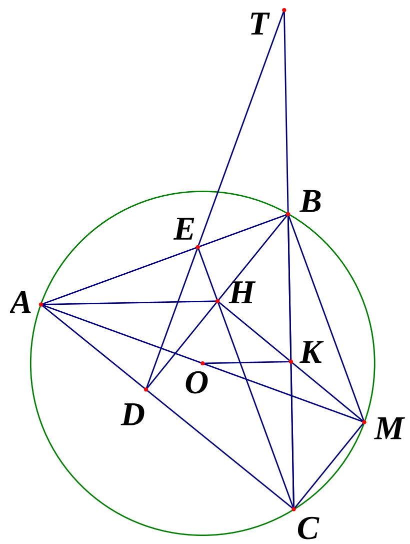
Cho đường tròn $(O;R)$, BC là một dây cung cố định của $(O;R)$ không qua O. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho $AB < AC$ và tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi T là giao điểm của DE với BC.

a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $TB^2 = TD.TE - TB.BC$.

c) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác ADH theo R.

Lời giải



a) Hình vẽ đúng

Ta có $BD \perp AC \Rightarrow \widehat{BDC} = 90^0$

$CE \perp AB \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0$

$\Rightarrow D, E$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn BC (không đổi) dưới một góc 90^0.

Suy ra $BCDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vì $BCDE$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BCE}=\widehat{BDE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EB)

Xét tam giác TBD và tam giác TEC có

$\widehat{ETB}$ chung, $\widehat{BCE}=\widehat{BDE}$ nên tam giác TBD đồng dạng với tam giác TEC

$\Rightarrow \dfrac{TB}{TD}=\dfrac{TE}{TC}\Leftrightarrow TB.TC=TD.TE.$

Mà $TC=TB+BC$ nên $TB.(TB+BC)=TD.TE\Leftrightarrow TB^2=TD.TE-TB.BC.$

c) Kẻ đường kính AM của (O) và gọi K là trung điểm của BC.

Ta có

$$\begin{cases}BH\perp AC\\ MC\perp AC\end{cases}\Rightarrow BH//MC;\begin{cases}CH\perp AB\\ MB\perp AB\end{cases}\Rightarrow CH//MB.$$

Suy ra tứ giác $BHCM$ là hình bình hành nên K là trung điểm của HM.

Tam giác AHM có OK là đường trung bình nên $AH=2OK \quad (1)$

mà $BC=R\sqrt{3}\Rightarrow BK=\dfrac{R\sqrt{3}}{2},\quad OK=\sqrt{OB^2-BK^2}=\dfrac{R}{2}\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AH=R$ (không đổi).

Tam giác AHD vuông tại D nên $AD^2+DH^2=AH^2=R^2$

Áp dụng BĐT, $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2),\forall x,y$; Đẳng thức xảy ra khi $x=y$.

$\Rightarrow (AD+DH)^2\le 2(AD^2+DH^2)=2R^2$

$\Rightarrow AD+DH\le R\sqrt{2}$

Chu vi của tam giác AHD là $AH+AD+HD\le R+R\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})R$.

Vậy chu vi của tam giác AHD lớn nhất bằng $(1+\sqrt{2})R$ khi $HD=AD$.

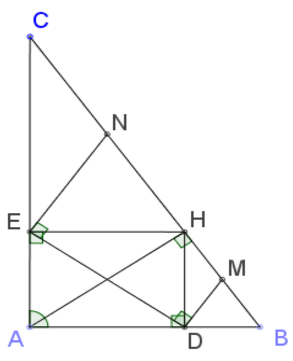
Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2020-2021)*

Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên cạnh AB và AC. Biết $BH=4$ (cm), $HC=9$ (cm).

a) Tính độ dài đoạn thẳng DE.

b) Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và E cắt cạnh BC lần lượt tại M và N. Tính diện tích tứ giác $DENM$.

Lời giải



1.

a) Ta có $AH^2 = BH.CH = 36 \Rightarrow AH = 6$ (cm).

Vì $\widehat{EAD} = \widehat{ADH} = \widehat{HEA} = 90^0$ nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow DE = AH = 6$ (cm).

b) Ta có $\widehat{AHD} = \widehat{EDH} \Rightarrow \widehat{MDH} = \widehat{MHD}$

$\Rightarrow$ tam giác DMH cân tại $M \Rightarrow DM = MH$ (1)

$\widehat{MBD} + \widehat{MHD} = 90^0; \widehat{MDB} + \widehat{MDH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MDB}$

$\Rightarrow \Delta MDB$ cân tại $M \Rightarrow DM = MB = \dfrac{BH}{2} = 2$ (cm).

Chứng minh tương tự ta được $EN = \dfrac{CH}{2} = \dfrac{9}{2}$ (cm).

Tứ giác $DENM$ là hình thang vuông tại D và E nên

$S_{DENM} = \dfrac{DE(DM + EN)}{2} = = \dfrac{39}{2}$ (cm^2).

Câu 36. *(Trường chuyên Vĩnh Long năm 2020-2021)*

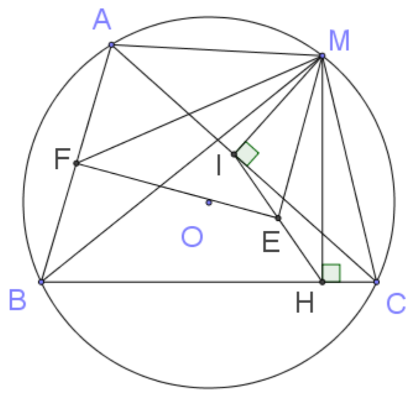
Cho tam giác $ABC\left(AB < AC\right)$ có ba góc nhọn nội tiếp (O), M là điểm thuộc cung nhỏ AC $\left(M \neq A, M \neq C, MA < MC\right)$. Vẽ MH vuông góc với BC tại H, MI vuông góc với AC tại I (ba điểm M, I, B không thẳng hàng).

a) Chứng minh $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$.

b) Chứng minh ΔBMA đồng dạng ΔHMI.

c) Gọi E là trung điểm của IH và F là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ME vuông góc với EF.

Lời giải



a) Tứ giác $IHCM$ nội tiếp đường tròn đường kính MC

$\Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{ICM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{IM}$)

b) Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{IHM}$ (cùng bằng $\widehat{ICM}$)

$\widehat{AMB} = \widehat{IMH}$ (cùng bằng $\widehat{ICH}$)

Vậy $\Delta BMA \backsim \Delta HMI$.

c) Ta có $\Delta BMA \backsim \Delta HMI \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MIH} \Rightarrow \widehat{FAM} = \widehat{MIE}$

Do $\Delta BMA \backsim \Delta HMI \Rightarrow \dfrac{AM}{IM}=\dfrac{AB}{IH}=\dfrac{2AF}{2IE}=\dfrac{AF}{IE}$

$\Rightarrow \Delta AMF \backsim \Delta IME \Rightarrow \widehat{AMF}=\widehat{IME}$.

Ta có $\widehat{AMF}+\widehat{FMI}=\widehat{IME}+\widehat{FMI} \Rightarrow \widehat{AMI}=\widehat{FME}$

Do $\Delta AMF \backsim \Delta IME \Rightarrow \dfrac{MA}{MI}=\dfrac{MF}{ME} \Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta MFE$

$\Rightarrow \widehat{MIA}=\widehat{MEF}$, mà $\widehat{MIA}=90^0 \Rightarrow \widehat{MEF}=90^0 \Rightarrow ME \perp EF$.

Câu 37. *(Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2020-2021)*

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Kéo dài BE, AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại F và M.

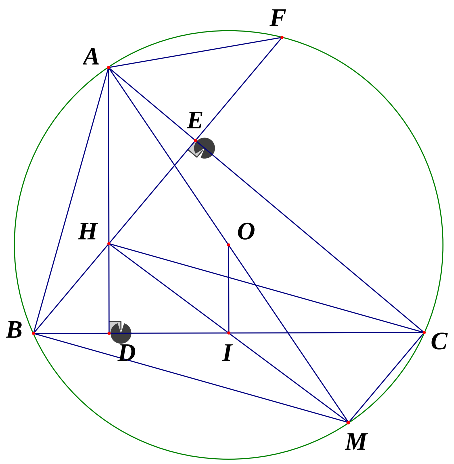
a) Chứng minh ΔHAF cân.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm H, I, M thẳng hàng và $AH = 2OI$.

c) Khi BC cố định, xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

Lời giải

a) Vẽ hình đúng đến câu 4.a



Ta có: $\widehat{AHF}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{DAE}$)

Lại có $\widehat{ACB}=\widehat{AFB}$ (cùng chắn cung AB)

Suy ra $\widehat{AHF}=\widehat{AFB} \Rightarrow \Delta AHF$ cân tại A.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm H, I, M thẳng hàng và $AH = 2OI$.

Ta có $BH // CM$ (cùng vuông AC), $HC // BM$ (cùng vuông AB).

$\Rightarrow BHCM$ là hình bình hình .

Mà I là trung điểm của $BC \Rightarrow I$ cũng là trung điểm của $HM \Rightarrow$ ba điểm H, I, M thẳng hàng.

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\Delta AHM \Rightarrow AH = 2OI$

c) Khi BC cố định, xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

Theo câu 1 ta có $\widehat{AHF}=\widehat{AFB}\Rightarrow\widehat{BHD}=\widehat{ACB}\Rightarrow\Delta DAC\sim\Delta DBH(\mathrm{g.g})$

Suy ra $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{DB}{DH}\Leftrightarrow DA.DH=DB.DC$

Ta có $DB.DC\le\left(\dfrac{BD+CD}{2}\right)^2\Leftrightarrow DB.DC\le\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $BD=DC$.

Vậy để $DH.DA$ lớn nhất thì A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Câu 38. *(Trường chuyên Hòa Bình năm 2020-2021)*

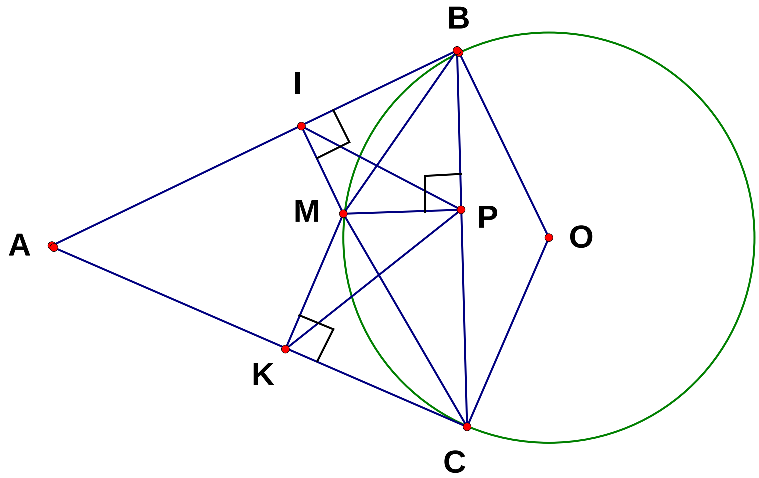
Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M (M khác B, M khác C), từ M kẻ MI, MK, MP lần lượt vuông góc với AB, AC, BC ($I\in AB, K\in AC, P\in BC$).

1) Chứng minh rằng: $\widehat{\mathrm{MPK}}=\widehat{\mathrm{MBC}}$

2) Chứng minh rằng : Tam giác MIP đồng dạng với tam giác MPK.

3) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Tứ giác KMPC nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MPK}=\widehat{MCK}$ (cùng chắn cung KM)

$\widehat{MCK}=\widehat{MBC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung CM)

$\Rightarrow\widehat{MPK}=\widehat{MBC}$ (1)

Tứ giác IMPB nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MIP}=\widehat{MBP}$ (cùng chắn cung PM)(2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow\widehat{MPK}=\widehat{MIP}$

Chứng minh tương tự $\widehat{MKP}=\widehat{MPI}$

$\Rightarrow\Delta MIP\backsim\Delta MPK(g-g)$

$\Delta MIP\backsim\Delta MPK\Rightarrow\dfrac{MI}{MP}=\dfrac{MP}{MK}\Leftrightarrow MI.MK=MP^2$

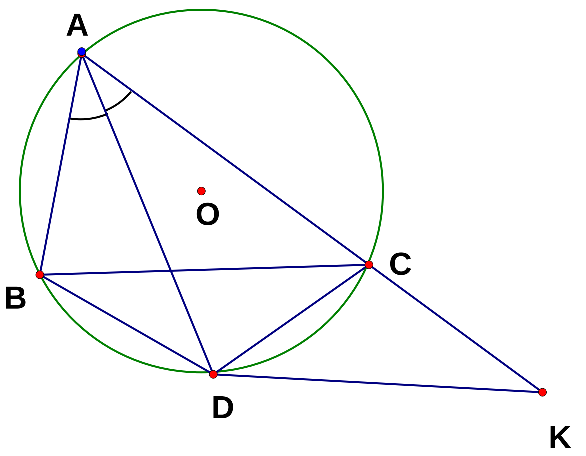
Vì $MI.MK=MP^2\Rightarrow MI.MK.MP=MP^3$

$\Rightarrow MI.MK.MP$ lớn nhất khi MP lớn nhất $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Câu 39. *(Trường chuyên Hòa Bình năm 2020-2021)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng $AB + AC < 2AD$.

Lời giải



Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho CK = AB.

Xét ΔCDK và ΔBDA có: CK = AB

$\widehat{KCD} = \widehat{ABD}$ (vì cùng bù với $\widehat{ACD}$)

CD = BD ($\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC}$).

$\Rightarrow \Delta CDK = \Delta BDA \ (c.g.c)$

$\Rightarrow$ DK = DA.

Trong ΔADK có AK < AD + DK $\Leftrightarrow$ AB + AC < AD + AD = 2AD.

Câu 40. *(Trường chuyên Hòa Bình năm 2020-2021)*

Cho đường tròn tâm O và dây AB cố định, gọi M là điểm chính giữa của cung AB và N là một điểm bất kỳ trên dây AB (N khác A, N khác B). Tia MN cắt đường tròn (O) tại E.

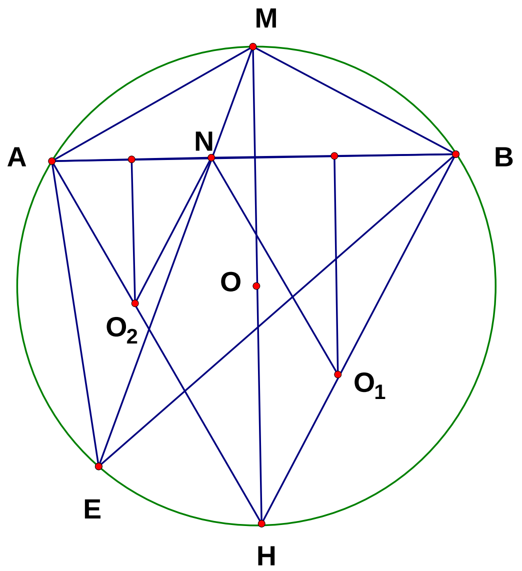
1) Chứng minh rằng: Tam giác MNA đồng dạng với tam giác MAE.

2) Chứng minh rằng: $MB.BE = BN.ME$

3) Chứng minh rằng: BM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BNE.

4) Chứng minh rằng: Khi N di động trên AB thì tổng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BNE và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANE không đổi.

Lời giải



1) $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM} \Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{MAB}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\widehat{AME}$ chung

$\Rightarrow \Delta MNA \backsim \Delta MAE(g-g)$

2) Chứng minh $\Delta MNB \backsim \Delta MBE(g-g)$

$$\Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{BN}{BE} \Rightarrow MB.BE = BN.BE$$

3) Ta có: $\widehat{NEB} = \widehat{NBM}$ $\Rightarrow \widehat{NBM} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BN}$

$\Rightarrow$ BM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBNE

4) Kẻ đường kính MH $\Rightarrow \widehat{MBH} = 90^0 \Rightarrow MB \perp BH$

Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBNE ; ΔANE

$\Rightarrow$ O_1 thuộc BH và đường trung trực của BN

$\Rightarrow$ ΔO_1NB cân tại O_1 $\Rightarrow \widehat{O_1BN} = \widehat{O_1NB}$ (1)

Tương tự: $\widehat{O_2AN} = \widehat{O_2NA}$ (2)

Mặt khác ΔHAB cân tại H $\Rightarrow \widehat{O_1BN} = \widehat{O_2AN}$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow \widehat{O_1NB} = \widehat{O_2AN} \Rightarrow NO_1 // AH$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{O_2NA} = \widehat{O_1BN} \Rightarrow NO_2 // BH$

$\Rightarrow$ Tứ giác NO_1HO_2 là hình bình hành

$$\Rightarrow NO_1 = O_2H = O_1B \Rightarrow O_1B + O_2A = O_2H + O_2A = AH$$

Vì A,B, O cố định, nên M, H cố định $\Rightarrow$ AH không đổi.

Câu 41. *(Trường chuyên Hà Nam năm 2020-2021)*

Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K. Gọi L là giao điểm của MA và BC. Đường thẳng $A'I$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S.

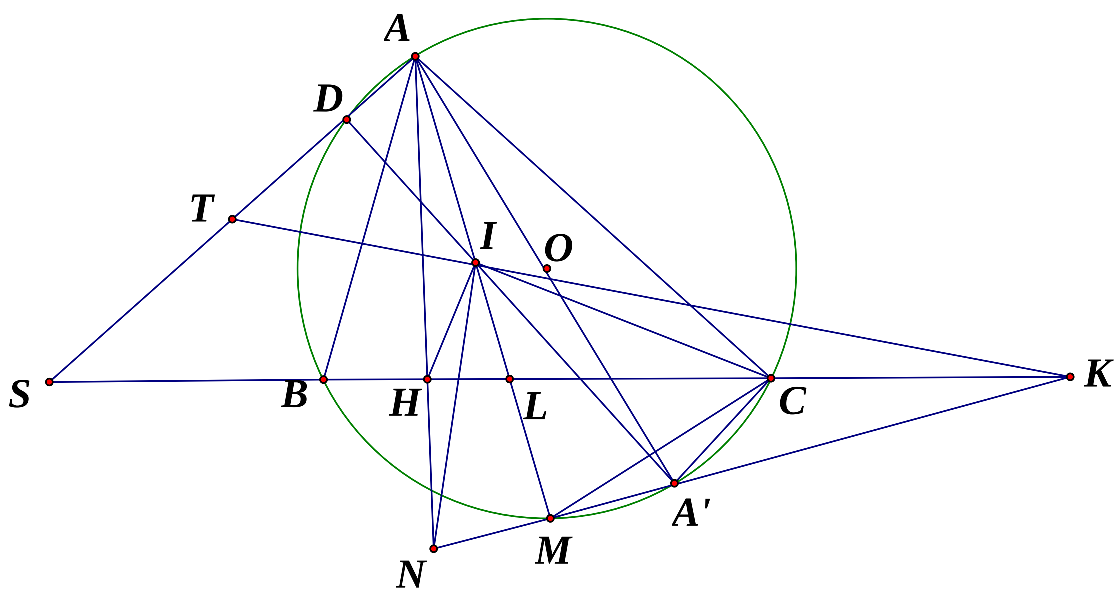
1. Chứng minh tam giác ANA' là tam giác cân và $MA'.MK = ML.MA$.

2. Chứng minh $MI^2 = ML.MA$ và tứ giác $NHIK$ là tứ giác nội tiếp.

3. Gọi T là trung điểm của cạnh SA, chứng minh ba điểm T, I, K thẳng hàng.

4. Chứng minh nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS.

Lời giải



1.

Ta có $\widehat{A'AC} = 90^0 - \widehat{AA'C} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}$ mà AI là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên AI là phân giác góc $\widehat{NAA'}$.

$AM \perp MA' \Rightarrow$ tam giác ANA' cân tại A.

$$\widehat{HKN} = 90^0 - \widehat{HNK} = \widehat{HAM} = \widehat{LAA'}$$

$\Delta MAA' \sim \Delta MKL(g.g) \Rightarrow MA'.MK = ML.MA$

2.

$\widehat{MIC} = \widehat{MAC} + \widehat{ACI} = \widehat{MCB} + \widehat{BCI} = \widehat{MCI} \Rightarrow MI = MC$

$\Delta MCL \sim \Delta MAC(g.g) \Rightarrow \quad ML.MA = MC^2 \Rightarrow ML.MA = MI^2$.

$$MN.MK = MA'.MK = ML.MA = MI^2 \Rightarrow \Delta IMN \sim \Delta KIN(g.g) \Rightarrow \widehat{NIK} = 90^0$$

$\widehat{NIK} = \widehat{NHK} = 90^0$. Vậy tứ giác $NHIK$ nội tiếp.

3.

Tứ giác *NHIK* nội tiếp suy ra $\widehat{IHK}=\widehat{INK}=\widehat{IA'M}=\widehat{IAD}$.

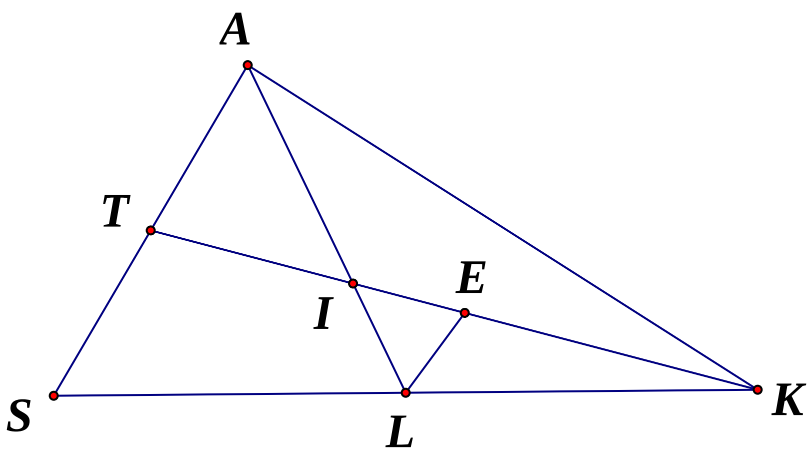
Suy ra tứ giác *AIHS* nội tiếp. Do đó $\widehat{AIS}=\widehat{AHS}=90^0$.

$\widehat{TIA}=\widehat{TAI}=\widehat{INK}$

$\Rightarrow \widehat{TIA}=\widehat{MIK}$, suy ra ba điểm T,I,K thẳng hàng

4.

Ta có $\dfrac{AI}{IL}=\dfrac{AB}{BL}=\dfrac{AC}{CL}=\dfrac{AB+AC}{BL+CL}=\dfrac{2BC}{BC}=2$



Kẻ $LE \parallel SA\,(E\in TK)$. Ta có $\dfrac{LE}{AT}=\dfrac{IL}{IA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{LE}{ST}=\dfrac{1}{2}$

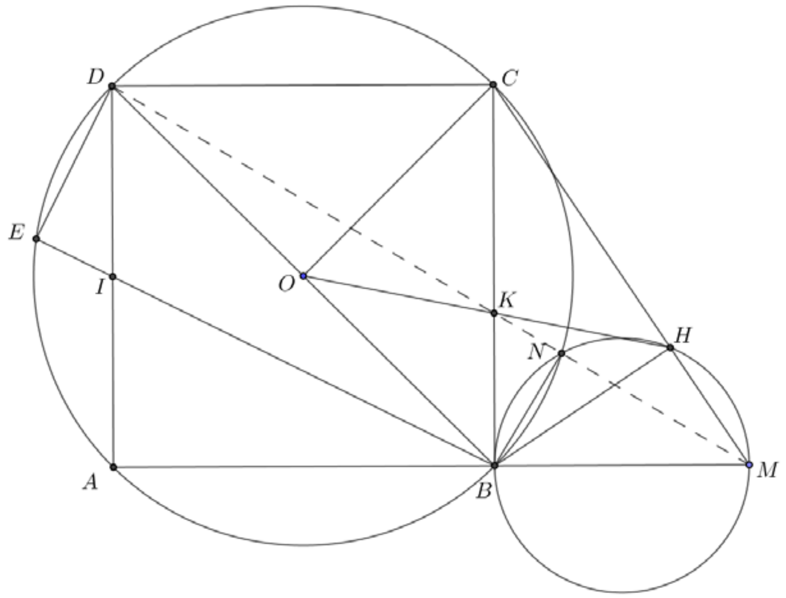
Suy ra L là trung điểm của SK mà $\dfrac{AI}{IL}=2$ nên I là trọng tâm của tam giác ASK.

Câu 42. *(Trường chuyên Hà Nam năm 2020-2021)*

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M khác điểm B. Kẻ BH vuông góc với CM (H thuộc CM). Gọi K là giao điểm của OH với BC.

1. Chứng minh tứ giác $BHCO$ nội tiếp, HO là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.
2. Chứng minh $BK.BH=CK.MH$.
3. Gọi I là trung điểm của cạnh AD, tia BI cắt đường tròn (O) tại E. Tính độ dài đoạn thẳng DE theo R.
4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Chứng minh ba điểm M,N,K thẳng hàng.

Lời giải



1. Theo giả thiết $BH \perp CM$ nên $\widehat{BHC} = 90^o$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{BOC} = 90^o$.

Suy ra $\widehat{BHC} + \widehat{BOC} = 180^o$ nên tứ giác $BHCO$ nội tiếp.

Vì $BHCO$ nội tiếp nên $\widehat{BHO} = \widehat{BCO} = 45^o$. Suy ra HO là phân giác của $\widehat{BHC}$.

2. Theo chứng minh ở phần a) ta có HK là phân giác của ΔHBC suy ra $\dfrac{BK}{CK} = \dfrac{BH}{CH}$ (1)

Mặt khác dễ thấy $\Delta HMB \backsim \Delta HBC$ (g.g) nên $\dfrac{BH}{CH} = \dfrac{MH}{BH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BK}{CK} = \dfrac{MH}{BH} \Leftrightarrow BK.BH = CK.MH$.

3. Ta có $\Delta ABI \backsim \Delta EDI$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{ID}{IB} \Leftrightarrow DE = \dfrac{AB.ID}{IB}$

Xét ΔABD vuông cân có $BD = 2R$ nên $AD = AB = R\sqrt{2}$, $IA = ID = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác vuông ABI ta có $IB = \sqrt{AB^2 + AI^2} = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$. Vậy

$$DE = \frac{R\sqrt{2}.\dfrac{R\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{R\sqrt{10}}{2}} = \frac{R\sqrt{10}}{5}.$$

4. *Ta chứng minh M, K, D thẳng hàng.

Thật vậy: Gọi K' là giao điểm của MD và đoạn BC

Vì $BM // CD$ nên theo định lí Talet ta có $\dfrac{BK'}{CK'} = \dfrac{BM}{AD} = \dfrac{BM}{BC}$ (3) (vì $AD = BC$)

Mà $\Delta HMB \backsim \Delta HBC$ (g.g) nên $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{HB}{HC}$.

Mặt khác theo chứng minh phần b) ta có $\dfrac{HB}{HC}=\dfrac{BK}{CK}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{BK}{CK}$ (4)

Từ (3), (4) ta có $\dfrac{BK'}{CK'}=\dfrac{BK}{CK}$ (với K, K' thuộc đoạn BC) suy ra $K' \equiv K$.

Vậy M, K, D thẳng hàng (3)

* Ta chứng minh M, N, D thẳng hàng.

Thật vậy

Vì $BH \perp MC$ nên đường tròn ngoại tam giác BHM có đường kính là BM suy ra $\widehat{BNM}=90^o$.

Vì BD là đường của đường tròn (O) nên $\widehat{BND}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Từ đó suy ra $\widehat{BNM}+\widehat{BND}=180^o$ nên M, N, D thẳng hàng (4).

Từ (3) và (4) ta có K, N, M thẳng hàng.

Câu 43. *(Trường chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2020-2021)*

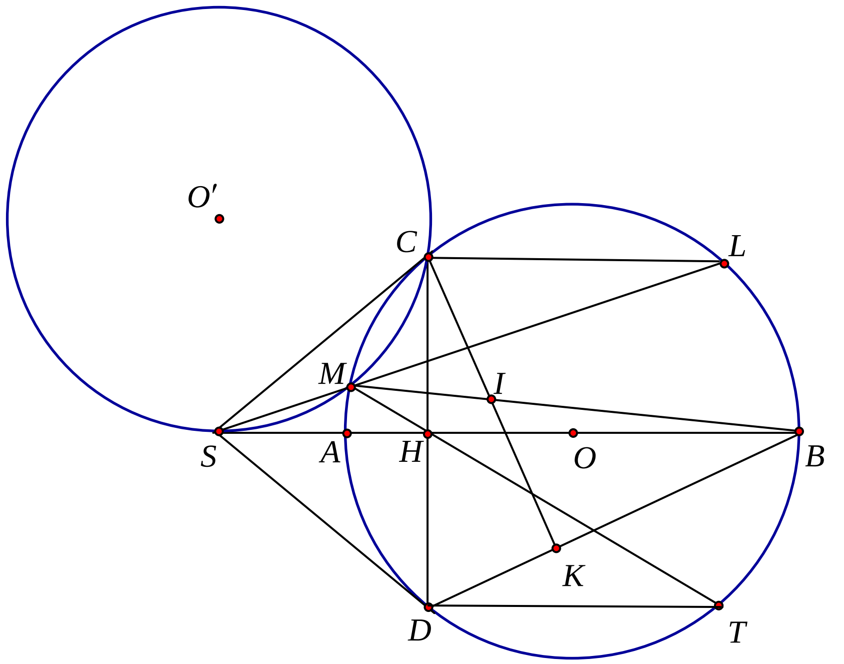
Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Từ điểm S thuộc tia đối của tia AB kẻ đến (O) hai tiếp tuyến SC và SD (C và D là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của đường kính AB và dây CD. Vẽ đường tròn (O') đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AB tại S. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm M khác C.

a) Chứng minh tứ giác $SMHD$ nội tiếp.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên BD, I là giao điểm của BM và CK. Chứng minh rằng HI song song với BD.

c) Các đường thẳng SM và HM lần lượt cắt (O) tại các điểm L và T (L, T khác M). Chứng minh rằng tứ giác $CDTL$ là hình vuông khi và chỉ khi $MC^2 = MS.MD$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{MSH} = \widehat{SCM} = \widehat{MDC} \Rightarrow SMHD$ là tứ giác nội tiếp.

b) $SMHD$ là tứ giác nội tiếp $\widehat{DMH} = \widehat{DSA} = \widehat{DAB} - \widehat{SDA} = \widehat{DMB} - \widehat{ABD}$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DMB} - \widehat{DMH} = \widehat{HMI}$

Tứ giác $CHKB$ có $\widehat{CHB} = \widehat{CKB} = 90^0$ nên nội tiếp $\widehat{HCI} = \widehat{HBK} = \widehat{HMI}$ $\Rightarrow CMHI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MIH} = \widehat{MCH} = \widehat{HBD} \Rightarrow HI // BD$.

c) Ta có $\widehat{DTM} = \widehat{SDM} = \widehat{SHM} \Rightarrow DT // AB$; $\widehat{CLM} = \widehat{SCM} = \widehat{MSA} \Rightarrow CL // AB$

$\Rightarrow \widehat{LCD} = \widehat{TDC} = 90^0 \Rightarrow CDTL$ là hình chữ nhật. Do đó $CDTL$ là hình vuông $\Leftrightarrow \Delta OCD$ vuông cân, tức là ΔSCD vuông cân.

Như vậy $SO = R\sqrt{2}$ với R là bán kính đường tròn (O). Khi đó

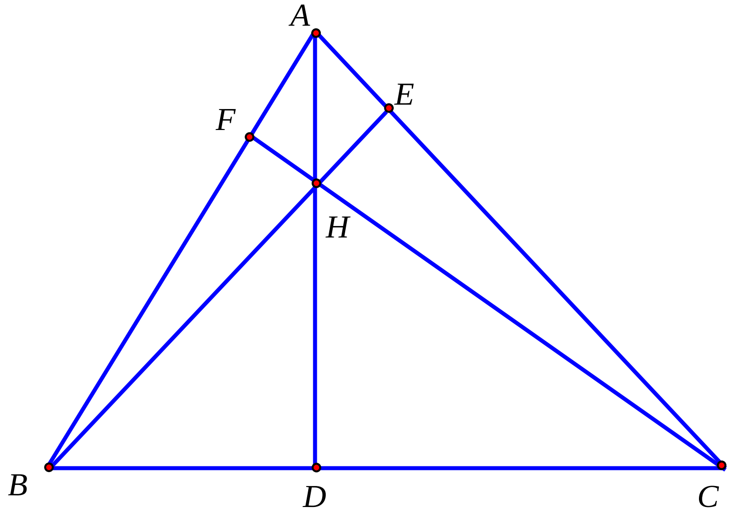
$\widehat{MCS} = \widehat{MSH} = \widehat{MDC} \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MSC}$

Suy ra ΔMCS; ΔMDC đồng dạng $\Rightarrow MC^2 = MS.MD.$

Câu 44. *(Trường chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2020-2021)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và có trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC. Biết $\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 + \left(\frac{BC}{HD}\right)^2 + \left(\frac{CA}{HE}\right)^2 = 36$, hãy chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải



Đặt $BC = a;\ CA = b;\ AB = c$ và S là diện tích ΔABC. Ta có

$a^2 = BC^2 = BE^2 + EC^2 = BE^2 + (b - AE)^2 = BE^2 + b^2 + AE^2 - 2b.AE = b^2 + c^2 - 2b.AE$

$\Rightarrow AE = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$. Do đó $4S^2 = BE^2.b^2 = b^2\left(c^2 - AE^2\right) = b^2\left(c^2 - \dfrac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2}\right)$

$16S^2 = 4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 = \left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)$

$= (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$

$\le (b + c + a)\left(\dfrac{b + c - a + a + b - c + a - b + c}{3}\right)^3 = \dfrac{(a + b + c)^4}{27}$

Suy ra $(a + b + c)^2 \ge 12S\sqrt{3}$.

Ta lại có $\left(\dfrac{a}{HD} + \dfrac{b}{HE} + \dfrac{c}{HF}\right)(a.HD + b.HE + c.HF) \ge (a + b + c)^2 \ge 12S\sqrt{3}$

Mà $a.HD + b.HE + c.HF = 2S \Rightarrow \dfrac{a}{HD} + \dfrac{b}{HE} + \dfrac{c}{HF} \ge 6\sqrt{3}$

Do đó $\left(\dfrac{AB}{HF}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{HD}\right)^2 + \left(\dfrac{CA}{HE}\right)^2 \ge \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{HD} + \dfrac{b}{HE} + \dfrac{c}{HF}\right)^2 \ge 36$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b + c - a = c + a - b = a + b - c \\ HD = HE = HF \\ \dfrac{a}{HD} = \dfrac{b}{HE} = \dfrac{c}{HF} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy ΔABC đều.

Câu 45. *(Trường chuyên Gia Lai năm 2020-2021)*

Từ điểm A bên ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B,C là các tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm I (I không trùng với B,C). Gọi M,N,P thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ I đến các đường thẳng BC,CA và AB.

a) Chứng minh tứ giác $BMIP$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $IM^2 = IN.IP$.

c) Gọi giao điểm của BI và MP là E, giao điểm của CI và MN là F. Chứng minh $IM \perp EF$.

Lời giải

a) Ta có : $\widehat{BPI} = \widehat{BMI} = 90^o$

Do đó tứ giác $BMIP$ nội tiếp đường tròn đường kính BI

b) $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có tứ giác $CMIN$ nội tiếp đường tròn đường kính CI.

$\Rightarrow \widehat{MIP} = 180^o - \widehat{MBP} = 180^o - \widehat{MCN} = \widehat{MIN}$

$\widehat{PBI} = \widehat{PMI}$ (cùng chắn cung IP của đường tròn đường kính BI)

$\widehat{MCI} = \widehat{MNI}$ (cùng chắn cung IM của đường tròn đường kính CI)

$\widehat{PBI} = \widehat{BCI} = \widehat{MCI}$ (cùng chắn cung IB của đường tròn đường (O))

$\Rightarrow \widehat{PMI} = \widehat{PBI} = \widehat{MCI} = \widehat{MNI}$

Do đó $\Delta IMP \backsim \Delta INM$ (vì có $\widehat{MIP} = \widehat{MIN}$ và $\widehat{PMI} = \widehat{MNI}$)

$\Rightarrow \dfrac{IM}{IN} = \dfrac{IP}{IM} \Rightarrow IM^2 = IN.IP$.

c) Ta có $\widehat{PMI} = \widehat{MCI}$ (từ trên).

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{IBM} = \widehat{IMN}$

mà $\widehat{IBM} + \widehat{MCI} + \widehat{BIC} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{PMI} + \widehat{IMN} + \widehat{BIC} = 180^o$ hay $\widehat{EMF} + \widehat{EIF} = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác $EMFI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{EMI}$ (nội tiếp cùng chắn một cung)

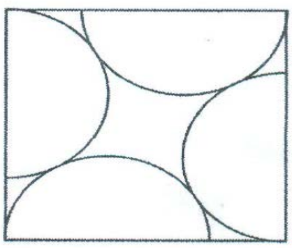
$\Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{MCI}$ ($= \widehat{EMI}$)

mà $\widehat{EFI}$ và $\widehat{MCI}$ là hai góc đồng vị $\Rightarrow EF \,//\, BC$

Theo giả thiết $IM \perp BC$ nên suy ra $IM \perp EF$

Câu 46. *(Trường chuyên Đồng Tháp năm 2020-2021)*

Bốn nửa hình tròn có bán kính bằng 2cm tiếp xúc ngoài với nhau, được đặt trong một hình vuông như hình vẽ. Tính diện tích hình vuông.



Lời giải

Đặt $AC - 2 = x,\ x > 0$.

Áp dụng Pitago trong ΔABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + (2+x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2+2\sqrt{3} \\ x = -2-2\sqrt{3}\ (l) \end{array}\right.$

Cạnh hình vuông là $4-2+2\sqrt{3} = 2+2\sqrt{3}\ (cm)$.

Diệnt tích hình vuông là $S = \left(2+2\sqrt{3}\right) = 16+8\sqrt{3}\ \left(cm^2\right)$

Câu 47. *(Trường chuyên Đồng Tháp năm 2020-2021)*

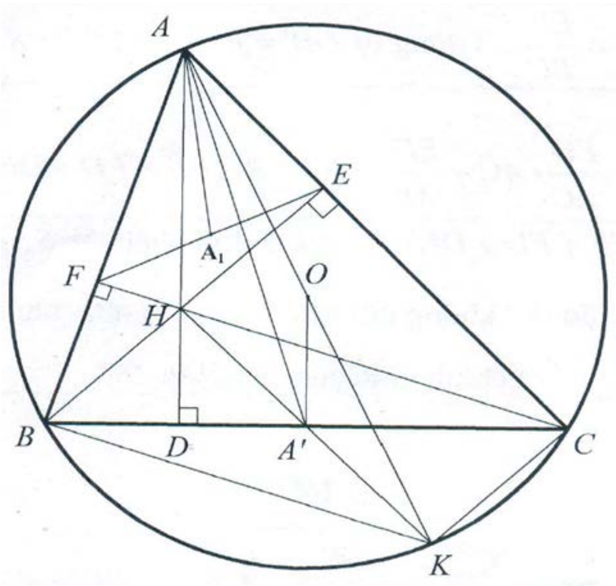
Cho BC là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ $(BC \neq 2R)$. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tâm O luôn nằm trong ΔABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ΔABC đồng quy tại H.

1. Chứng minh ΔAEF đồng dạng với ΔABC.

2. Gọi A', A_1 lần lượt là trung điểm của BC, EF. Chứng minh rằng $AH = 2OA'$ và $R.AA_1 = AA'.OA'$.

3. Chứng minh $R.(EF+FD+DE) = 2S_{\Delta ABC}$, từ đó suy ra vị trí của điểm A để tổng $EF+FD+DE$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



1.Tứ giác $AEHF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AHE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)

Lại có $\widehat{AHE} = \widehat{BHD}$ (đối đỉnh)

$\widehat{BHD} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ $\widehat{HBD}$) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Suy ra ΔAEF đồng dạng với ΔABC (g – g).

2. Ta có $KB // CH$; $KC // BH$ suy ra $BHCK$ là hình bình hành. Do đó A' là trung điểm của KH. Nên OA' là đường trung bình của ΔAHK.

Suy ra $OH = 2.OA'$

Gọi R, R' lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ΔAEF; AA' là trung tuyến ΔABC; AA_1 là trung tuyến ΔAEF;

Do ΔAEF đồng dạng với ΔABC

$\Rightarrow \dfrac{R}{R'} = \dfrac{AA'}{AA_1} \Rightarrow R.AA_1 = AA'.R' = AA'.\dfrac{AH}{2} = AA'.\dfrac{2A'O}{2}$

Vậy $R.AA_1 = AA'.A'O$. (1)

3. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AC, AB. Ta có $OB' \perp AC$; $OC' \perp AB$. Suy ra OA', OB', OC' lần lượt là đường cao của các ΔOBC, ΔOCA, ΔOAB.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} + S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left(OA'.BC + OB'.AC + OC'.AB\right)$$

$$\Leftrightarrow 2S_{\Delta ABC} = \left(OA'.BC + OB'.AC + OC'.AB\right) \text{ (2)}$$

Theo (1) suy ra $OA' = R.\dfrac{AA_1}{AA'}$ mà $\dfrac{AA_1}{AA'}$ là tỷ số giữa hai tam giác đồng dạng ΔABC và ΔAEF nên $\dfrac{AA_1}{AA'} = \dfrac{EF}{BC}$. Tương tự $OB' = R.\dfrac{FD}{AC}$; $OC' = R.\dfrac{ED}{AB}$

Thay vào (2) ta được

$$2S_{\Delta ABC} = R\left(\frac{EF}{BC}.BC + \frac{FD}{AC}.AC + \frac{ED}{AB}.AB\right) = R\left(EF + FD + DE\right)$$

Do R không đổi nên $\left(EF + FD + DE\right)$ đạt giá trị lớn nhất khi $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AD.BC$ do BC không đổi nên $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi AD lớn nhất, mà AD lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Câu 48. *(Trường chuyên Quảng Ngãi năm 2020-2021)*

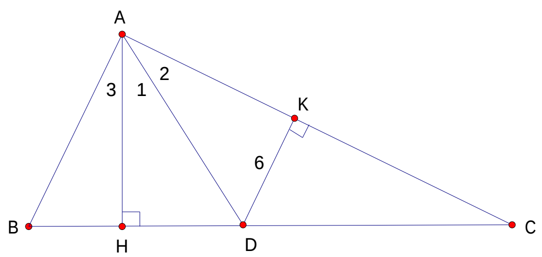
1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt HC tại D. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên AC. Tính AB, biết $BC = 25$ cm và $DK = 6$ cm.

2. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AH cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng CH và AB, S là giao điểm của hai đường thẳng BH và AC.

a) Chứng minh tứ giác BCSL nội tiếp và BC là đường trung trực của đoạn thẳng HK.

b) Gọi M là trung điểm BC, đường thẳng OM cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi N là trung điểm PQ. Chứng minh hai đường thẳng HM và AN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Lời giải



1. Ta có $\Delta HAD = \Delta KAD$ (AD cạnh chung; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$)

$\Rightarrow HD = KD = 6cm$

Ta lại có $\widehat{A_3} = \widehat{C}$ (cùng phụ $\widehat{B}$); $\widehat{BAD} = \widehat{A_3} + \widehat{A_1}$; $\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{A_2}$

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$; $\widehat{A_3} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ADB} \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B $\Rightarrow BA = BD$.

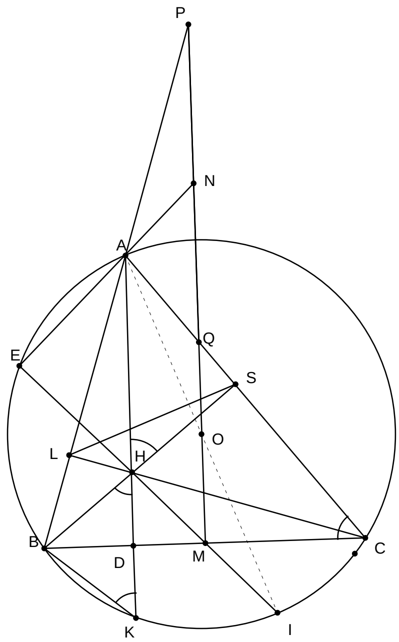
Đặt $BA = x \Rightarrow BD = x \Rightarrow BH = x - 6$.

ΔABC vuông tại A, có đường cao AH nên $AB^2 = BH.BC$

$\Rightarrow x^2 = (x-6)25$. Giải phương trình, ta được: $x_1 = 15$; $x_2 = 10$

Vậy $AB = 10cm$ hoặc $AB = 15cm$.

2)



a) Ta có H là trực tâm nên $BH \perp AC$, $CH \perp AB$ suy ra $\widehat{BSC} = \widehat{CLB} = 90^\circ$.
Suy ra tứ giác BCSL nội tiếp

Ta có $\widehat{BKA} = \widehat{BCA}$ (cùng chắn cung AB của (O)).

Mặt khác, $\widehat{BCA} = \widehat{AHS}$ (do cùng phụ với góc $\widehat{HAS}$) và $\widehat{AHS} = \widehat{BHK}$.

Do đó, $\widehat{BKH} = \widehat{BHK}$ suy ra BKH là tam giác cân tại B. Mà $BD \perp HK$ nên BC là đường trung trực của HK.

b) Gọi AI là đường kính của (O).

Khi đó, $CH \parallel BI$ (do cùng vuông góc với AB),

$CI \parallel BH$ (do cùng vuông góc với AC).

Suy ra BHCI là hình hình hành. Do đó H, M, I thẳng hàng.

Gọi E là giao điểm của HM và AN, ta chứng minh E nằm trên (O).

Ta có $\widehat{HCB} = \widehat{LSB}$ (cùng chắn cung BL của đường tròn (BCSL)),

$\widehat{LSB} = \widehat{LAH}$ (cùng chắn cung LH của đường tròn (ALHS)),

$\widehat{LAH} = \widehat{APQ}$ (do $OM \parallel AH$). Suy ra $\widehat{HCB} = \widehat{APQ}$.

Tương tự ta có $\widehat{HBC} = \widehat{SLC} = \widehat{HAS} = \widehat{AQP}$.

Từ đó suy ra $\Delta APQ \sim \Delta HCB$.

Mà N là trung điểm PQ, M là trung điểm CB nên suy ra $\Delta ANQ \sim \Delta HMB$.

Do đó, $\widehat{BHM} = \widehat{NAQ}$, mà $\widehat{BHM} = \widehat{EHS}$ (đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{EHS} = \widehat{NAQ}$ hay $AEHS$ là tứ giác nội tiếp.

Mà $\widehat{ASH} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEH} = 90^\circ$ hay $\widehat{AEI} = 90^0$ do vậy E nằm trên đường tròn (O).

Câu 49. *(Trường chuyên Hải Dương năm 2020-2021)*

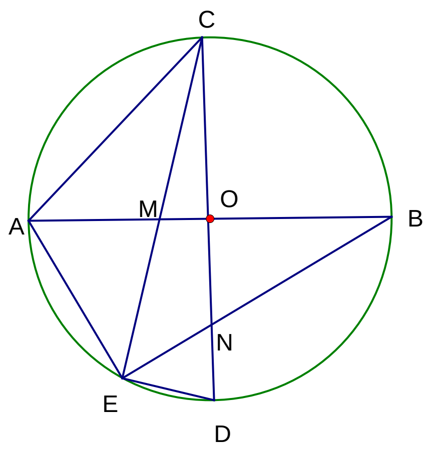
1) Cho đường tròn $(O;R)$, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy E là điểm bất kỳ nằm trên cung nhỏ AD (E không trùng với A và D). Đường thẳng EC cắt OA tại M; đường thẳng EB cắt OD tại N.

a) Chứng minh rằng: $AM.ED = \sqrt{2}\, OM.EA$;

b) Xác định vị trí điểm E để tổng $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Cho tam giác nhọn ABC cố định. Gọi O là điểm bất kỳ nằm trong tam giác, các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = AN.CM.BP$.

Lời giải



a) Xét ΔCOM và ΔCED có $\widehat{CED} = 90^0$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{COM} = \widehat{CED} = 90^0\\ \widehat{ECD} \quad chung\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta COM \backsim \Delta CED \Rightarrow \frac{CO}{CE} = \frac{OM}{ED} \quad (1)$$

Do AB, CD là 2 đường kính vuông góc với nhau $\Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{CAB} = 45^0$

Xét ΔAMC và ΔEAC có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{CEA} = \widehat{CAB} = 45^0\\ \widehat{ACE} \quad chung\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta EAC$$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{CE} = \dfrac{AM}{AE}$

mà $AC = \sqrt{2}\,CO$ (do ΔACO vuông cân tại O)

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AE} = \dfrac{\sqrt{2}\,CO}{CE} = \dfrac{\sqrt{2}\,OM}{ED} \Leftrightarrow \dfrac{ED}{AE} = \dfrac{\sqrt{2}\,OM}{AM}$

$\Rightarrow$ AM.ED = $\sqrt{2}$ OM.AE

b) Theo câu a ta có $\dfrac{ED}{AE} = \dfrac{\sqrt{2}\,OM}{AM}$ (2)

Tương tự câu a ta có $\dfrac{EA}{DE} = \dfrac{\sqrt{2}ON}{DN}$ (3)

Nhân 2 vế của (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{OM}{AM}.\dfrac{ON}{DN} = \dfrac{1}{2}$

Ta có $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{DN} \geq 2\sqrt{\dfrac{OM}{AM}.\dfrac{ON}{DN}} = 2\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi :

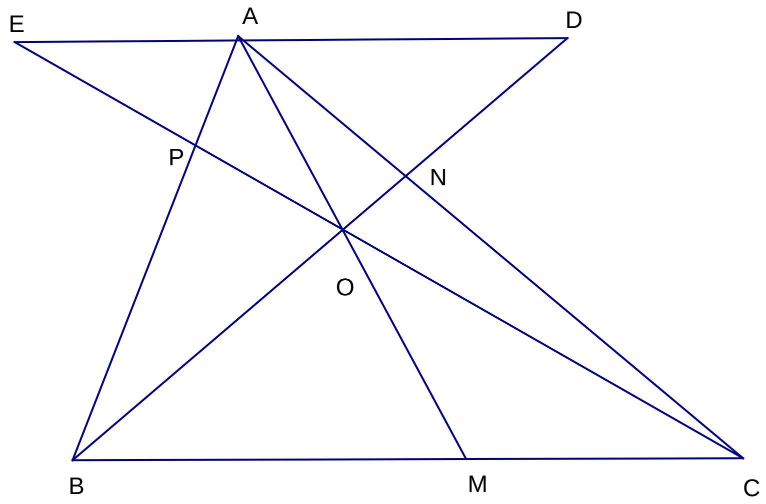
$\dfrac{OM}{AM} = \dfrac{ON}{DN} \Leftrightarrow \dfrac{ED}{\sqrt{2}EA} = \dfrac{EA}{\sqrt{2}ED} \Leftrightarrow ED = EA$

$\Leftrightarrow$ E là điểm chính giữa cung nhỏ AD

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{DN} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ E là điểm chính giữa của cung nhỏ AD

2)



Qua A kẻ 1 đường thẳng song song với BC cắt tia BO, CO lần lượt tại D, E.

Theo Định lý Talet ta có:

$\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AD}{BC}, \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{BC}{EA}, \dfrac{CM}{AE} = \dfrac{MB}{AD} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow \dfrac{CM}{MB} = \dfrac{AE}{AD}$

Nhân từng vế của các tỷ lệ thức ta được: $\frac{AN}{NC}.\frac{CM}{MB}.\frac{BP}{PA}.=\frac{AD}{BC}.\frac{AE}{AD}.\frac{BC}{AE}=1$

$\Rightarrow AN.CM.BP = NC.MB.PA$

Ta có $\sqrt{AN.NC} \le \frac{AN+CN}{2} = \frac{AC}{2}$

$\sqrt{BM.MC} \le \frac{BC}{2}$

$\sqrt{AP.PB} \le \frac{AB}{2}$

Nhân từng vế ta có $\sqrt{AN.NC.CM.MB.BP.PA} \le \frac{AB.BC.CA}{8}$

$AN.CM.BP \le \frac{AB.BC.CA}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi O là trọng tâm của tam giác ABC

Vậy giá trị lớn nhất của T là $T = \frac{AB.BC.CA}{8}$

khi O là trọng tâm của tam giác ABC

Câu 50. *(Trường chuyên Bình Phước năm 2020-2021)*

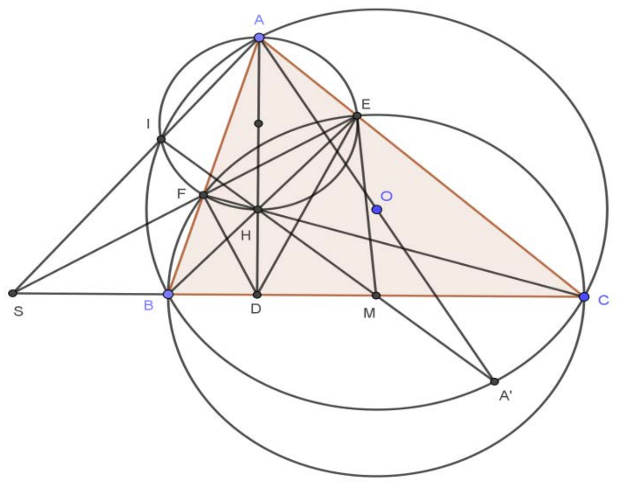
Cho tam giác nhọn ABC với $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD$; $ABDE$ nội tiếp và H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác $DFEM$ nội tiếp.

c) Tia MH cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh rằng các đường thẳng AI, EF, BC đồng quy.

Lời giải



a) Ta có $\angle BDH + \angle BFH = 180^0$ nên tứ giác $BFHD$ nội tiếp

Ta có $\angle BDA = \angle BEA = 90^0$ nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn đường kính AB

Ta có $\angle FDH = \angle FBH$ (Cùng chắn cung FH của tứ giác nội tiếp $BFHD$)

Mặt khác lại có $\angle FBH = \angle ABE = \angle ADE$ (Cùng chắn cung AE của tứ giác nội tiếp $ABDE$).

Suy ra $\angle FDH = \angle EDH$ hay DH là phân giác của góc $\angle EDF$.

Tương tự FH cũng là phân giác của góc $\angle DFE$ hay H là tâm nội tiếp của tam giác DFE (đpcm)

b) Vì EM là trung tuyến của tam giác vuông BEC nên ta có tam giác MBE cân tại M.

Hay ta có $\angle EMC = 2\angle EBM$ (góc ngoài của tam giác MBE)

Theo câu **a**) ta có $\angle EFD = 2\angle HFD$ (do FH cũng là phân giác của góc $\angle DFE$)

Mà ta lại có $\angle HFD = \angle HBD = \angle EBM$ (Cùng chắn cung DH của tứ giác nội tiếp $BFHD$)

Từ đó suy ra $\angle DFE = \angle EMC \Rightarrow DFEM$ nội tiếp (đpcm)

c) Tia MH cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh rằng các đường thẳng AI, EF, BC đồng quy.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O).

Ta có $BH // A'C$ vì cùng vuông góc với AC

Và $CH // A'B$ vì cùng vuông góc với AB

Nên có tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành nên có A', M, H, I thẳng hàng

Từ đó ta có I nằm trên đường tròn $(AFHE)$ với đường kính AH (vì $\angle HIA = \angle A'IA = 90^0$)

Gọi EF cắt BC tại S, AI cắt BC tại S'. Ta có $SF.SE = SB.SC$ và $S'I.S'A = S'B.S'C$

Ta chứng minh được $SB.SC = SO^2 - R^2$ không đổi gọi là phương tích của S đối với đường tròn (O).

Từ đó ta có S và S' có cùng phương tích đối với đường tròn $(AFHE)$ nên $S \equiv S'$

Câu 51. *(Trường chuyên Lam Sơn năm 2020-2021)*

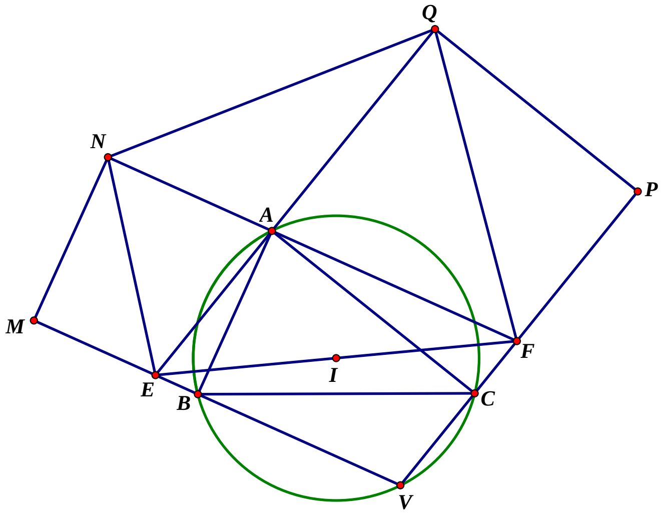
Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} > 45°$. Vẽ phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$. Đường thẳng AQ cắt đoạn thẳng BM tại E, đường thẳng AN cắt đoạn thẳng CP tại F.

1. Chứng minh tứ giác $EFQN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

2. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3. Đường thẳng MN cắt đường thẳng PQ tại D. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K (K khác D). Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J. Chứng minh bốn điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Lời giải



1) Xét hai tam giác vuông ABE và ACF ta có $\widehat{ABE}=\widehat{ACF}=90°$ và $\widehat{EAB}=\widehat{FAC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}\Rightarrow\frac{AN}{AQ}=\frac{AE}{AF}$.

Xét hai tam giác ANE và AQF có $\widehat{NAE}=\widehat{QAF}$ (đối đỉnh) và do $\frac{AN}{AQ}=\frac{AE}{AF}$ nên chúng đồng dạng, suy ra $\widehat{ENA}=\widehat{FQA}\Rightarrow\widehat{ENF}=\widehat{FQE}$.

Do đó tứ giác $EFQN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

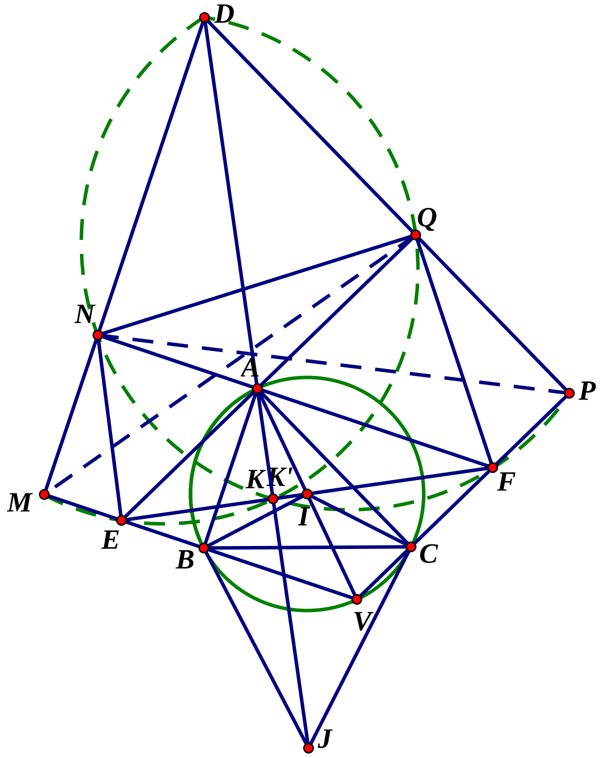
2. Gọi V là giao điểm của hai đường thẳng EB và FC.

Tứ giác $EAFV$ có $AF//EV, AE//VF$ nên nó là hình bình hành.

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng EF nên nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng AV. Suy ra ba điểm A, I, V thẳng hàng.

Mặt khác, ta thấy tứ giác $ABVC$ có $\widehat{ABV}=\widehat{ACV}=90°$ nên nó nội tiếp được trong đường tròn đường kính AV. Suy ra $IA=IB=IC$ hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3.



Ta chứng minh D, A, K ***thẳng hàng***

Gọi K' là giao điểm của DA và EF. Dễ thấy tứ giác $NDQA$ nên $\widehat{NDK'} = \widehat{NQA}$.

Lại có $\widehat{NFK'} = \widehat{NQA}$ (Do tứ giác $EFQN$ nội tiếp), suy ra $\widehat{NDK'} = \widehat{NFK'}$.

Do đó tứ giác $NDFK'$ nội tiếp.

Mặt khác, do $NDPF$ nội tiếp nên năm điểm N, D, P, F, K' cùng thuộc một đường tròn. Vậy K' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác NDP.

Chứng minh tương tự ta có K' cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác DMQ.

Suy ra $K \equiv K'$. Vậy ba điểm D, A, K thẳng hàng (1).

Ta chứng minh A, K, J ***thẳng hàng***

Do năm điểm D, Q, K, E, M cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{AKE} = \widehat{DQE} = 90°$, suy ra $AK \perp KE$.

Từ đó suy ra tứ giác $AKBE$ nội tiếp nên $\widehat{EKB} = \widehat{EAB} = 90° - \widehat{BAC}$.

Tương tự ta có $\widehat{FKC} = \widehat{FAC} = 90° - \widehat{BAC}$, suy ra $\widehat{BKC} = 180° - \left(\widehat{EKB} + \widehat{FKC}\right) = 2\widehat{BAC} = \widehat{BIC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung). Suy ra tứ giác $BKIC$ nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{JBI} = \widehat{JCI} = 90°$ nên tứ giác $BICJ$ nội tiếp.

Do đó năm điểm B, K, I, C, J cùng thuộc một đường tròn nên ta có $\widehat{IKJ} = \widehat{JBI} = 90°$, suy ra $JK \perp EF$.

Mà $AK \perp KE$, suy ra ba điểm A, K, J thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra bốn điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Câu 52. *(Trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2020-2021)*

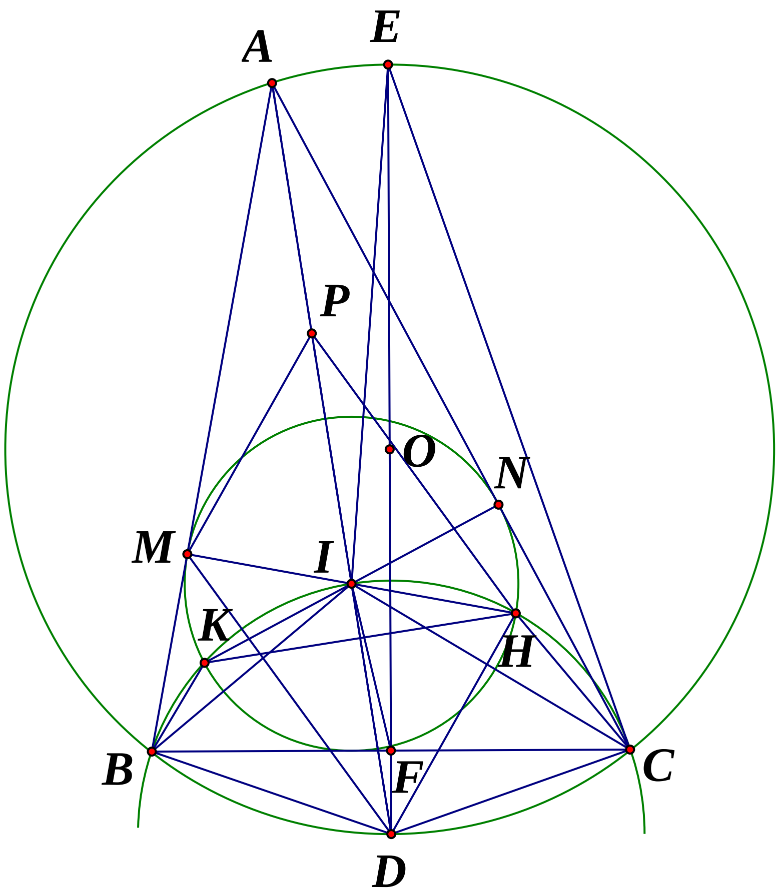
Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm D (khác A). Đường thẳng OD cắt đường tròn (O) tại điểm E (khác D) và cắt cạnh BC tại điểm F.

a) Chứng minh rằng tam giác IBD cân. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b) Chứng minh $ID.IE = IF.DE$.

c) Gọi các điểm M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các cạnh AB, AC. Gọi H, K lần lượt là các điểm đối xứng với M, N qua I. Biết rằng $AB + AC = 3.BC$, chứng minh $\widehat{KBI} = \widehat{HCI}$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{DBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (1) (do AI, BI lần lượt là phân giác các góc BAC, ABC và tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn).

Mặt khác $\widehat{BID} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (do AI, BI tương ứng là phân giác góc BAC, ABC) (2).

Từ (1) và (2) ta được $\widehat{BID} = \widehat{IBD} \Rightarrow$ tam giác DBI cân tại D.

Ta có $\widehat{ICD} = \widehat{ICA} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} + \widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (3) (do AI, CI lần lượt là phân giác các góc BAC, ACB và tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn).

Mặt khác $\widehat{CID} = \widehat{ICA} + \widehat{IAC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (do *AI*, *BI* tương ứng là phân giác góc *BAC*, *ABC*) (4).

Từ (3) và (4) ta được $\widehat{CID} = \widehat{ICD} \Rightarrow$ tam giác *DCI* cân tại *D*.

Do tam giác *DBI* và *DCI* cân tại *D* nên $DB = DI$, $DC = DI \Rightarrow DB = DC = DI \Rightarrow D$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IBC*.

b) Theo kết quả phần a ta có tam giác *DIC* cân tại *D* nên $CD = DI$

Do *OD* là trung trực của *BC* suy ra *F* là trung điểm của *BC*. Do *DE* là đường kính của đường tròn *(O)* suy ra $\widehat{DCE} = 90^0$.

Kết hợp với *CF* là đường cao của tam giác *DCE* nên $CD^2 = DF.DE = DI^2 \Rightarrow \frac{DI}{DF} = \frac{DE}{DI}$.

Xét hai tam giác *DIF* và *DEI* có:

$\frac{DI}{DF} = \frac{DE}{DI}$ và $\widehat{IDF} = \widehat{EDI}$ suy ra tam giác *DIF* đồng dạng với tam giác *DEI*

Suy ra $\frac{IF}{IE} = \frac{ID}{DE} \Leftrightarrow ID.IE = IF.DE$.

c) Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác *ABDC* ta được:

$$AB.DC + AC.DB = AD.BC \Leftrightarrow (AB + AC).DB = AD.BC$$

$$\Leftrightarrow 3.BC.ID = AD.BC \Leftrightarrow 3.ID = AD \Leftrightarrow IA = 2.ID$$

Gọi *P* là trung điểm của đoạn thẳng *AI*, suy ra $MP = AP = PI = ID = \frac{1}{2}AI \Rightarrow I$ là trung điểm của *PD*. Mặt khác *I* là trung điểm *HM* suy ra tứ giác *MPHD* là hình bình hành $\Rightarrow MP = DH$.

Từ đó suy ra *DH* = *MP* = *DI* (5).

Chứng minh tương tự ta được *DK* = *DI* (6).

Mặt khác theo kết quả phần a ta được *DB* = *DC* = *DI* (7).

Từ (5), (6), (7) ta được $DB = DC = DH = DK = DI$ suy ra *B, C, H, K, I* cùng thuộc đường tròn tâm D.

Do *B, C, H, K, I* cùng thuộc đường tròn tâm D nên $\widehat{KBI} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{IK}$, $\widehat{ICH} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{IH}$.

Do $IK = IH \Rightarrow \overset{\frown}{IK} = \overset{\frown}{IH} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{IK} =$ sđ $\overset{\frown}{IH}$.

Từ đó suy ra $\widehat{KBI} = \widehat{HCI}$.

Câu 52. *(Trường chuyên Ninh Bình năm 2020-2021)*

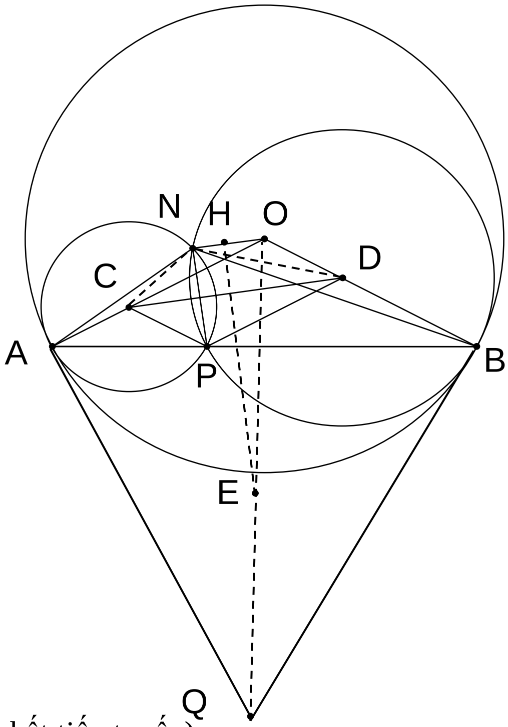
Cho đường tròn (T) tâm O và dây cung AB cố định $(O \notin AB)$. P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm của đoạn thẳng AB). Đường tròn (T_1) tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (T) tại A. Đường tròn (T_2) tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (T) tại B. Hai đường tròn (T_1) và (T_2) cắt nhau tại N $(N \neq P)$. Gọi (d_1) là tiếp tuyến chung của (T) với (T_1) tại A, (d_2) là tiếp tuyến chung của (T) với (T_2) tại B, (d_1) cắt (d_2) tại điểm Q.

1. Chứng minh tứ giác $AOBQ$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh: $\widehat{ANP}=\widehat{BNP}$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

3. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng ON luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm của đoạn thẳng AB).

Lời giải



a) Có $\widehat{OAQ}=90^0$ (Tính chất tiếp tuyến)

$\widehat{OBQ}=90^0$ (Tính chất tiếp tuyến) .

A, B cùng nhìn OQ dưới một góc vuông nên tứ giác $AOBQ$ nội tiếp (1) .

b) Trong đường tròn (T_1) có $\widehat{ANP}=\widehat{QAP}$ $(=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AP})$

Trong đường tròn (T_2) có $\widehat{BNP}=\widehat{QBP}$ $(=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BP})$

Trong đường tròn (T) có $\widehat{QAP}=\widehat{QBP}$ $(=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB})$ $\rightarrow \widehat{ANP}=\widehat{BNP}$

Ta có $\widehat{ANB}=\widehat{ANP}+\widehat{BNP}=\widehat{QAP}+\widehat{QBP}=180^0-\widehat{AQB}$, suy ra NAQB nội tiếp (2) .

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm O, N, A, Q, B cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{OAN}=\widehat{OBN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ON}$)

Trong (T_1) có $\widehat{OCN}=2\widehat{OAN}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung).

Trong (T_2) có $\widehat{ODN}=2\widehat{OBN}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung).

$\Rightarrow \widehat{OCN}=\widehat{ODN}$ suy ra bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

c) Theo các ý trên suy ra 5 điểm O, N, A, Q, B cùng nằm trên đường tròn đường kính OQ

Gọi E là trung điểm OQ; do O, Q cố định suy ra E cố định và E là tâm đường tròn đi

đi qua các điểm O, N, A, Q, B.

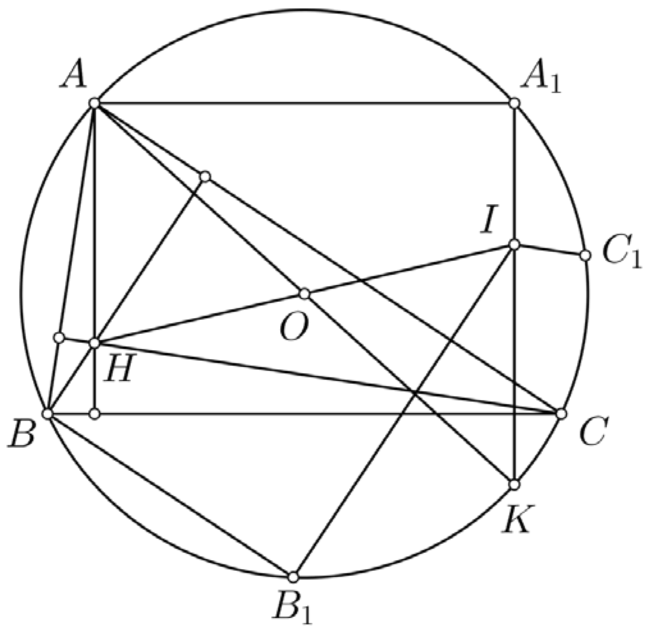
$\Rightarrow OE = NE \Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng ON

Suy ra đường trung trực của ON luôn đi qua điểm E cố định.

Câu 53. *(Trường chuyên tp Hồ Chí Minh năm 2020-2021)*

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < BC < CA)$ nội tiếp đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_1. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại B_1. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt (O) tại C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Lời giải



Gọi H là trực tâm ΔABC.

Kẻ AK là đường kính của (O). Suy ra $A_1K \perp AA_1$. Mà $AA_1 // BC$ nên $A_1K \perp BC$.

Do đó $A_1K // AH$.

Gọi I là điểm đối xứng của H qua O. Suy ra $AHKI$ là hình bình hành, suy ra $KI // AH$.

Mà $AH // AK$ nên $I \in A_1K$.

Vậy đường thẳng qua A_1 và vuông góc với BC đi qua I.

Chứng minh tương tự, ta có:

Đường thẳng qua B_1 và vuông góc với AC đi qua I.

Đường thẳng qua C_1 và vuông góc với AB đi qua I.

Vậy các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại I.

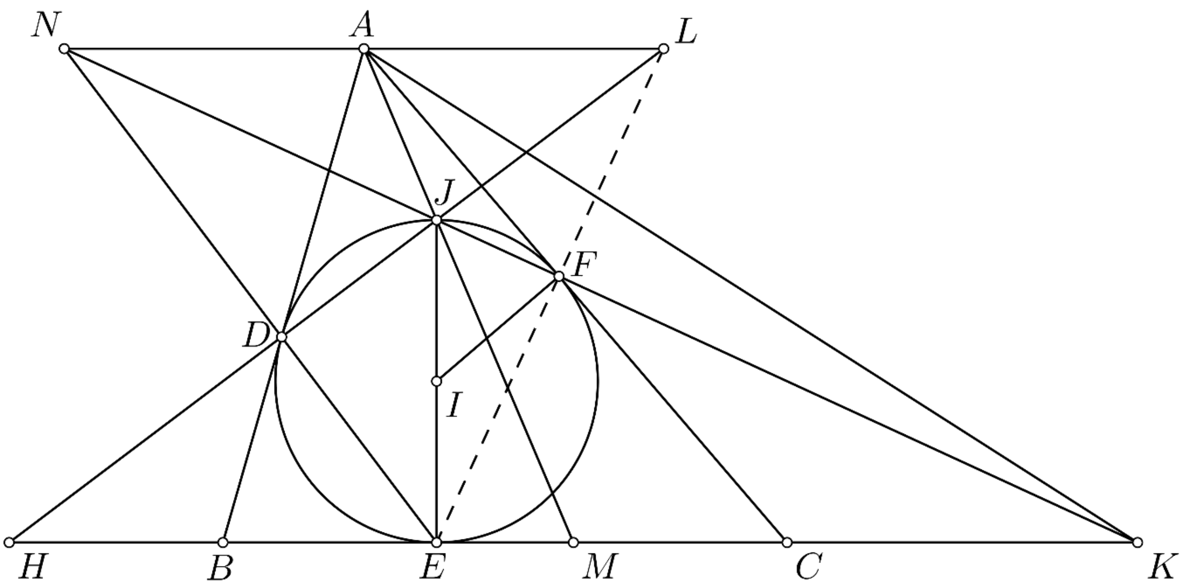
Câu 54. *(Trường chuyên tp Hồ Chí Minh năm 2020-2021)*

Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Kẻ đường kính EJ của đường tròn (I). Gọi d là đường thẳng qua A song song với BC. Đường thẳng JD cắt d, BC lần lượt tại L, H.

a) Chứng minh: E, F, L thẳng hàng.

b) JA, JF cắt BC lần lượt tại M, K. Chứng minh $MH = MK$.

Lời giải



Vẽ DE cắt AL tại N

Xét tam giác NLE có: $\begin{cases} JE \perp NL\,(NL // CB) \\ LJ \perp NE\,(DJ \perp NE) \end{cases}$

Suy ra J là trực tâm tam giác NLE, do đó $NJ \perp LE$.

Lại có: $\widehat{NDA} = \widehat{BDE} = \widehat{BED} = \widehat{AND} \Rightarrow AN = AD$.

Mà ΔNDL vuông tại D nên $AN = AD = AL \Rightarrow AN = AL = AF$ (do $AD = AF$).

Do đó ΔNFL vuông tại F hay $NF \perp LF$. Mặt khác

$\widehat{NFA} = \frac{1}{2}\widehat{FAL} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \widehat{IEF} = \widehat{JFA} \Rightarrow N, J, F$ thẳng hàng.

Do đó $NJ \perp LE$ và $NJ \perp LF$. Suy ra E, F, L thẳng hàng.

Cách 2: Vì $AL // CE$ nên $\widehat{LAF} = \widehat{FCE}$. Hai tam giác ALF, CEF đều cân mà có các góc ở đỉnh bằng nhau nên chúng đồng dạng. Suy ra $\widehat{AFL} = \widehat{CFE}$, suy ra L, F, E thẳng hàng.

b)

Do $AN = AL$ nên $MH = MK$ (bổ đề hình thang cho hình thang $NLKH$ có $NK \cap HL = J$).

Chứng minh bổ đề.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{NA}{MK} = \dfrac{JA}{JM} \\ \dfrac{AL}{MH} = \dfrac{JA}{JM} \end{cases}$, mà $AN = AL$ (chứng minh câu a))

Suy ra: $MK = MH$.

Câu 55. *(Trường chuyên Phú Thọ năm 2020-2021)*

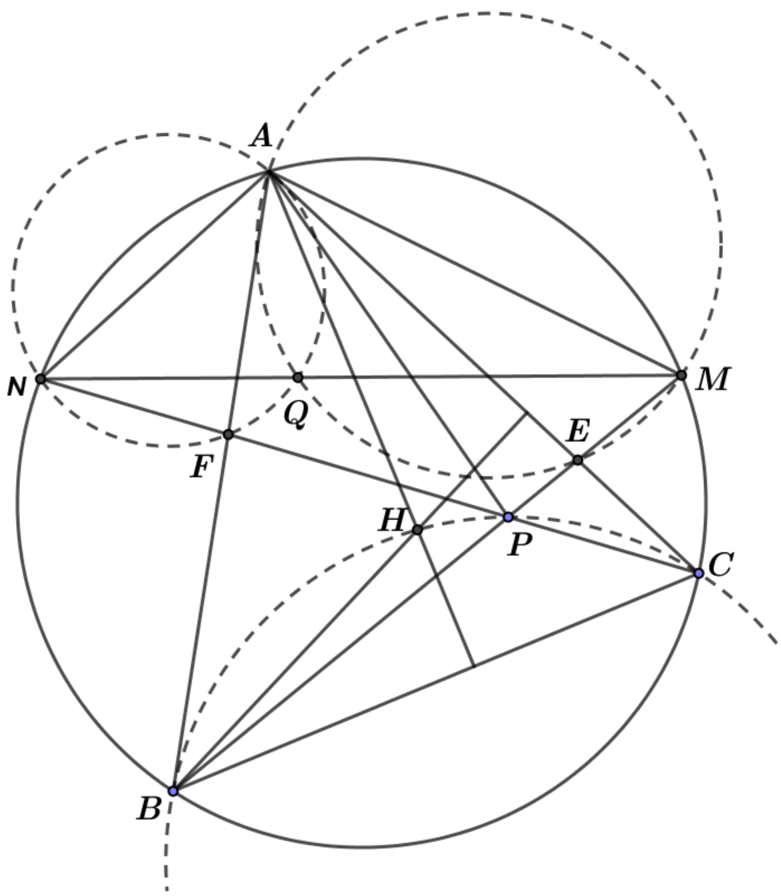
Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và nằm trong tam giác ABC, $(P \neq B, C, H)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng PB với đường tròn $(O), (M \neq B)$; N là giao điểm của đường thẳng PC với $(O), (N \neq C)$. Đường thẳng BM cắt AC tại E, đường thẳng CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại $Q, (Q \neq A)$.

a) Chứng minh tứ giác $AEPF$ nội tiếp.

b) Chứng minh M, N, Q thẳng hàng.

c) Trong trường hợp AP là phân giác của $\widehat{MAN}$, chứng minh PQ đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BHC} = 180^0 - \widehat{BAC}$,

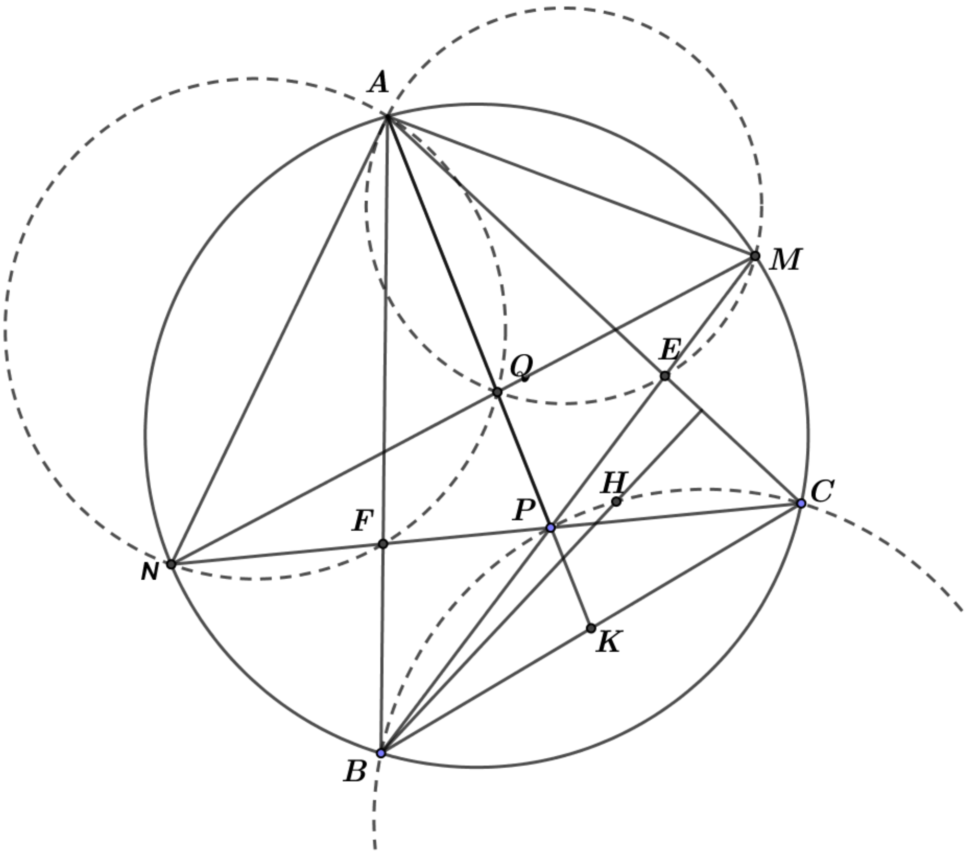
mà $\widehat{BPC} = \widehat{BHC} = \widehat{EPF}$ .Suy ra được $\widehat{BAC} + \widehat{EPF} = 180^0$ nên tứ giác $AEPF$ nội tiếp

b) Từ tứ giác $AEPF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BFC} + \widehat{BEC} = 180^0$.

Từ các tứ giác $AQFN, AQEM$ nội tiếp ta có $\widehat{MQN} = \widehat{MQA} + \widehat{NQA}$

$= \widehat{MEA} + \widehat{NFA} = 180^0$ .Vậy 3 điểm M, N, Q thẳng hàng.

c)



Ta có: $\widehat{QFA} = \widehat{ANQ} = \widehat{ANM} = \widehat{ABM}$

suy ra $FQ // BE$ tương tự $EQ // CF$ suy ra tứ giác $EQFP$ là hình bình hành.

Vậy $\widehat{QAN} = \widehat{QFP} = \widehat{QEP} = \widehat{QAM}$ hay AQ là phân giác $\widehat{MAN}$ suy ra A, P, Q thẳng hàng.

Gọi $K = PQ \cap BC$ thì $\widehat{KAC} = \widehat{QAC} = \widehat{QME} = \widehat{NMB} = \widehat{PCK}$.

Từ đó ta có: $\Delta AKC \sim \Delta CKP$ hay $KC^2 = KP.KA$ tương tự $KB^2 = KP.KA \Rightarrow KB = KC$